Grapes を用いた『分数関数の探究』

石川工業高等専門学校
阿蘇和寿

筆者は数学の授業にさまざまな探究活動を取り入れる試みを行っている。それは「学生たちが与えられた課題に対する探究活動を行い, その報告に基づいて授業を展開していく」というものである。自ら考えるという姿勢の涵養を通して, 数学活動の喜びや数学学習への動機付けを図ろうというものである。

今回は, 石川高専電気工学科第 2 学年「解析学 I 」で行った『分数関数の探究』について報告する。第 1 節は探究活動の概略, 第 2 節は探究活動を受けた鑑賞の時間に配布したプリント, 最後に鑑賞の時間が終わったあとの学生の感想を載せる。感想の中にある受講評価は「自分がよく学べたかどうか」, 授業評価は「よい授業だったかどうか」をそれぞれ 5 点満点で, 学生が評価するものである。

1　探究の概略

1 (課題) 次の分数関数について調べよ。

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} \quad (a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r \text{ は定数})$$

ただし分母は定数でない $(p^2+q^2 \neq 0)$ とする。

2 (出題と提出) 今回は同じ課題を 2 回行った。このクラスは第 1 学年で探究活動を経験しておらず, 探究すべきポイントの見つけ方やレポートの書き方やなどが分からなかった様子が見られたため, 2 回目は「漸近線の発見」に的を絞って出題した。第 1 回目, 第 2 回目ともクラス全員 (41 名, 1 名は長期欠席中) が提出した。出題と提出の時期は次の通り。

(1) (第 1 回目)　出題：4 月中旬, 提出：4 月下旬

(2) (第 2 回目)　出題：5 月中旬, 提出：5 月下旬

3 (探究の方法および提出方法) 探究はグラフ描画ソフト GRAPES を用いて行う。適当なグラフのタイプを選び, 1 つか 2 つのパラメータを変化させてグラフの特徴を捉える, というものである。レポートは GRAPES の画像を WORD に貼り付け, 考察と感想を書いたものをメールに添付して送付する, というものである。

4 (鑑賞) 鑑賞は 6 月 20 日第 4 限目 (特別講義, 前期中間試験後) に行った。鑑賞の際は “Good Report 賞” の発表とともに, 学生達自身の探究に用いたグラフを示しながら解説した。

5 (資料) 次の資料を示す。(発表時に示す)

(1) Good Report 賞の作品 (2 点)

(2) 鑑賞の時間についての受講評価, 授業評価, 感想

6 (発展と期待) 今後の展望とそれに関する期待とを箇条書きにする。

(1) 代表的な分数関数の描画法を全員がマスターできる工夫をしたい。

(2) 現在, 対象学生たちは整関数の導関数を学んでおり, 今後, 分数の右極限や左極限, 導関数の計算による分数関数の描画などに際して, この体験が生きて来るであろうと期待する (夏休み前頃)。

(3) 次の項に書くように, 今回の実践は失敗点も少なくない。特に「鑑賞の時間」は反省点も多い。しかし, 受講評価 (3.18, 学生の理解度) に比べて, 授業評価 (4.08, 探究学習, 鑑賞の時間に関する得点) はかなりの高得点を示している。これを, 学生たちの勉強意欲や新しい授業に対する期待と捉え, その気持を生かすようにしなければならない。

7 (反省) 今回の実践の反省を箇条書きにする。

(1) 課題が難しかったかも知れない。もっと的を絞って, 分母を 2 次関数にするとか, 分子を定数にするなどということが考えられよう。しかし, それにも一長一短があると思われる。

(2) 上のことと関係するが, 鑑賞の時間は, もっと的を絞って, 時間的に余裕を持って進めるべきであった。解説の途中で適切な (簡潔な) 関数のグラフを描かせるなどの作業を取り入れればよかった。学生たちは理論的な話では納得せず, 自分たちの手でできるシステム (アルゴリズムというべきか) をマスターすることで, 「理解した」と感じるのではないかと思われる。

(3) 可能ならば, 別の教師の見学者がいて, 学生の理解度を確かめながら解説を進めるという方法が採れればよかった。今回は大学院の学生が見学しており, それが可能であったのに, そのチャンスを逃してしまったことが悔やまれる。

(4) 学生たちが使ったグラフを提示したのはよかった。しかし, いまどのグラフが提示されているのか分かりにくかった, という指摘があった (見学の大学院生による)。また, 遠い席からはグラフの目盛りが読みとりにくかったらしい。こういうことは行っている教師には気づきにくいことで, 今後の注意とすべきである。

8 (私自身の感想) 今回は私自身に学ぶ点が多かった。課題の精選もさることながら, 特に鑑賞の時間に関しての反省点が多い。その点について, 見学していただいた大学院生の長田由美子さんから有益な助言をいただいた。ここに感謝したい。

2　『分数関数の探究』鑑賞プリント

9 (解説で用いる関数一覧)

	1	2	3
A	$y=\dfrac{1}{ax+1}$ $y=\dfrac{a}{x+1}$	$y=\dfrac{x}{ax+1}$ $y=\dfrac{ax-2}{4x+3}$	$y=\dfrac{ax^2+2}{ax}$ $y=\dfrac{ax^2+1}{x+1}$
B	$y=\dfrac{5}{ax^2+3x+4}$ $y=\dfrac{a}{x^2-b}$	$y=\dfrac{6x}{x^2+3x+a}$ $y=\dfrac{x+5}{ax^2+5}$	$y=\dfrac{4x^2}{x^2-b}$ $y=\dfrac{ax^2+1}{ax^2-1}$

10 (1 次方程式の解) $a \neq 0$ であるとき, 1 次方程式 $ax+b=0$ は必ず 1 つの解

$$x=-\frac{b}{a}$$

を持つ。1 次式 $ax+b$ はそこで符号を変える。

11 (2 次方程式) $a \neq 0$ であるとき, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

であり, 判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって, 次のように 3 つに分類される。

(1) $D>0$ のとき,　2 つの実数解を持つ。

(2) $D=0$ のとき,　1 つの実数解を持つ。

(3) $D<0$ のとき,　実数解を持たない。

12 (分数関数の零点) 分数関数について

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=0$$

13 (分数関数の定義域) 分数関数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の定義域は

$$g(x)\neq 0$$

ただし, 約分されるなどして実質的に分母が消滅する場合はこの限りではない。

14 (分数関数の極限値) $f(x)$ の次数 $<$ $g(x)$ の次数 であるとき,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

15 (真分数への変形) 分子の次数が分母の次数より大きな分数は, 次のようにして分子の次数を下げることができる。

$$\frac{px+q}{ax+b} = A + \frac{B}{ax+b} \tag{A2}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{ax+b} = Ax + B + \frac{C}{ax+b} \tag{A3}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{ax^2+bx+c} = A + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \tag{B2}$$

16 (グラフを描くための変形) 次の変形を参考にせよ。

$$y = \frac{x}{ax+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a(ax+1)}, \qquad y = \frac{ax-2}{4x+3} = \frac{a}{4} - \frac{8+3a}{4(4x+3)},$$

$$y = \frac{ax^2+2}{ax} = x + \frac{2}{ax}, \qquad y = \frac{ax^2+1}{x+1} = ax - a + \frac{1+a}{x+1},$$

$$y = \frac{4x^2}{x^2-b} = 4 + \frac{4b}{x^2-b}, \qquad y = \frac{ax^2+1}{ax^2-1} = 1 + \frac{2}{ax^2-1}$$

このレジュメに掲載したものの他に, 学生たちが作成したレポートのサンプルを示す。また, 鑑賞の時間のあとに学生たちが書いた, 探究活動および鑑賞の時間に対する感想を原文のまま示す。このクラスでは第 1 学年において探究活動を行った経験がなく, いわば初体験後の感想として興味深いものがある。