グラフ電卓を用いた曲線の探究

片岡 啓*

（2002 年 8 月 24 日）

『数学C』で扱う楕円や双曲線などはいろいろな意味で楽しい教材です。例えば、ギリシャの昔、人々はどのようにして双曲線や放物線を描いたのかを考えるだけでも、定義や方程式だけからは味わえない醍醐味があります。

ここでは、初めてグラフ電卓に触れる生徒を対象に、少し変わった楕円や双曲線を取り上げ、２次曲線の豊かな世界を探究してもらう活動について紹介します。

1. グラフ電卓の使い方の紹介

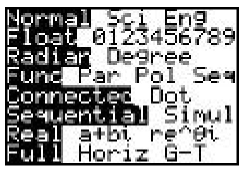
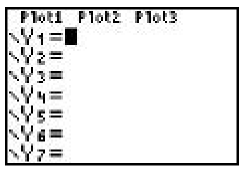
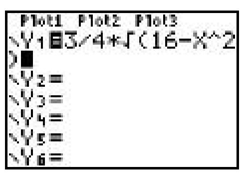
楕円や双曲線はいわゆる陰関数ですから、グラフ電卓で表示させるには少しだけ工夫が必要です。電卓が初めての生徒に対して、電源のオン・オフと、基本画面での根号の計算を少し練習したあと、まずプリント 1，2 のようにして楕円を描いてもらいます。

もちろんこのままでは楕円は上半分だけなので、下半分の描き方を二通り紹介します。Y2 にもう一度式を入力する方法と、−Y1 と入力する方法です。

初めて電卓を操作する生徒たちにとって、意

1．楕円を描く（上半分）

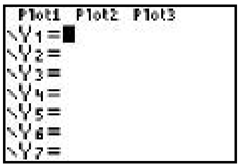
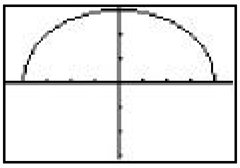
さて本題はグラフを描くことです。ここでは、楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ を書いてみることにします。ただ、この電卓は陰関数は描けません。そこで、陽関数に直します。

操作	キー入力	画面
モードを確認する	[MODE] （4行目が Func になっていれば OK です。function=関数）	
式を入力する画面を出す	[Y=] （一番左上のキーです。見てわかるように、同時に10本のグラフが書けます。）	
式の入力	[3][÷][4][×][2nd][√][1][6][−][X,T,Θ,n][^][2][)] （文字 x は [X,T,Θ,n] というキーが便利です。2乗の「乗」は [^] です）	

（プリント１）

＊ 上宮高等学校
jz4k-ktok@asahi-net.or.jp

これで準備は整ったのですが、画面にグラフを描く範囲を次のような方法で指定します。

操作	キー入力	画面
ズーム画面を出す	ZOOM （本来は拡大・縮小などの指定ですが、４は基本的な画面を設定してくれます）	
ZDecimal を指定する	4 を押すか、 矢印キーで 4:ZDecimal を反転させて ENTER を押す。 （decimal は 10 進という意味）	
楕円（上半分）を描く	（上の操作をすれば自動的に描かれます）	

（プリント２）

外に大変なのが入力ミスの訂正方法です。消去・訂正・挿入について、あらかじめていねいに話しておきます。

2. 陰関数の探究

2 次曲線というと、独特の形を持った、計算の面倒な方程式という印象が強く、陰関数が表す豊かな曲線の世界はあまりうまく伝わらないのが普通です。

そこで、少しでもその世界を探検してもらおうと、楕円・双曲線を話し終わった段階で、次のような簡単な課題を課しました。

まず、楕円と双曲線の復習です（プリント３）。楕円と双曲線を一般的な形であらわしたとき、その係数と曲線の形の関係を整理してもらうものです。

次に、プリント４のように xy の項を追加し、「歪んだ形」の楕円・双曲線の探究に進みます。

途中に登場する２次曲線は、電卓で表示すると図１のようになります。このような楕円が登場するだけでインパクトは十分です。

$$ax^2 + by^2 + c = 0 \quad \cdots ①$$

という形の 2 次曲線について、

課題 1

式①の係数 a, b, c がどのような条件を満たすとき、

ア．楕円（x 軸が長軸）

イ．楕円（y 軸が長軸）

ウ．双曲線（x 軸が主軸）

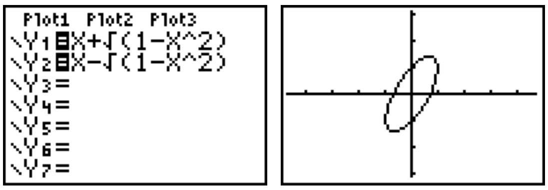
エ．双曲線（y 軸が主軸）

という異なる種類の 2 次曲線を描くか、について考えてください。例えば、$a=b=c=1$ として電卓に入力すると、

Y1=√(-X^2－1), Y2=-√(-x^2－1)

ですが、ZOOM 4 を押しても何も表示されません。こうしたことを手がかりに、a, b, c の条件とア、イ、ウ、エの図形の関係を調べてレポートにまとめてください。

（プリント３）



（図１）

課題２
次のような方程式で表される図形をグラフ電卓で表示してみてください。

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$

xy という項も確かに2次ですから「2次曲線」の仲間だと考えられます。電卓に入力するには解の公式を用いて次のように変形すればOKです。

：

：

この２次曲線は一般に、

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0 \quad \cdots ②$$

と表すことができます。さて、「課題１」と同じように a,b,c,d の条件と、できあがる図形の関係について、わかったことをレポートにまとめてください。

（プリント４）

最後にオプションということで、これら以外の陰関数の探究も促してみます。課題２に平行移動を入れたものや、次数を上げた曲線などを例としてあげました。

課題３
この課題はできるだけ挑戦するということにしておきましょう。課題２までに見たとおり、陰関数の世界は陽関数に比べてはるかに広く深い感じがします。そこで、いろいろな方程式が表す図形についてもっと調べてみようという課題です。例えば、

- $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ のように2次式に x, y の1次の項を加える。
- $x^3 + y^3 = 1$ のように2次曲線ではなく、次数の異なる曲線について調べてみる。

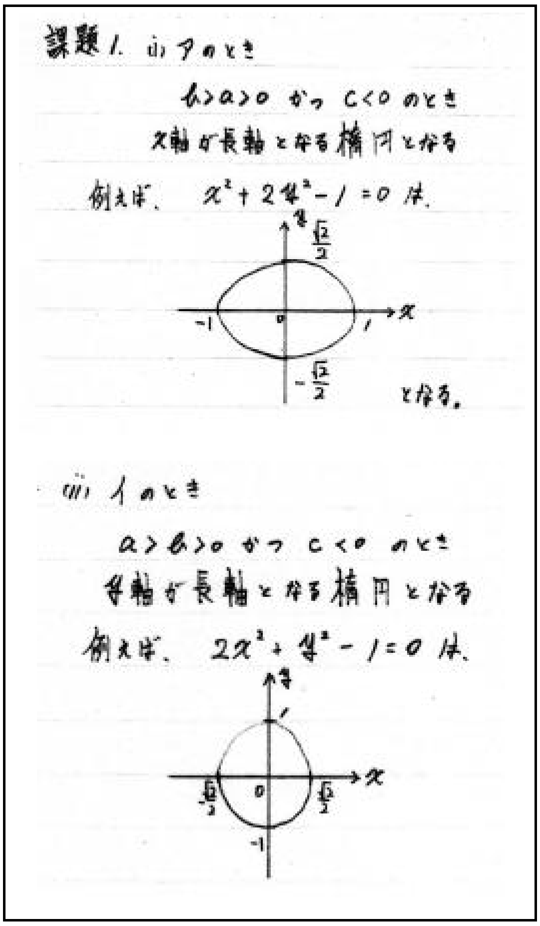
など、自分なりのテーマを決めて、わかったことをまとめてください。調べる「途中経過」もぜひ記してください。

（プリント５）

もちろん、レポートの書き方については具体例や予測、図を入れ、途中経過がわかるように記すことなどを説明しておきます。

3. 課題１のレポート例

教師にとっては当たり前のようなことでも、例をあげて整理するというのは生徒にとってあまり簡単ではありません。２,３の例を調べただけで止まってしまう例も珍しくありませんが、次のようなレポートも見受けられます。



（レポート１）

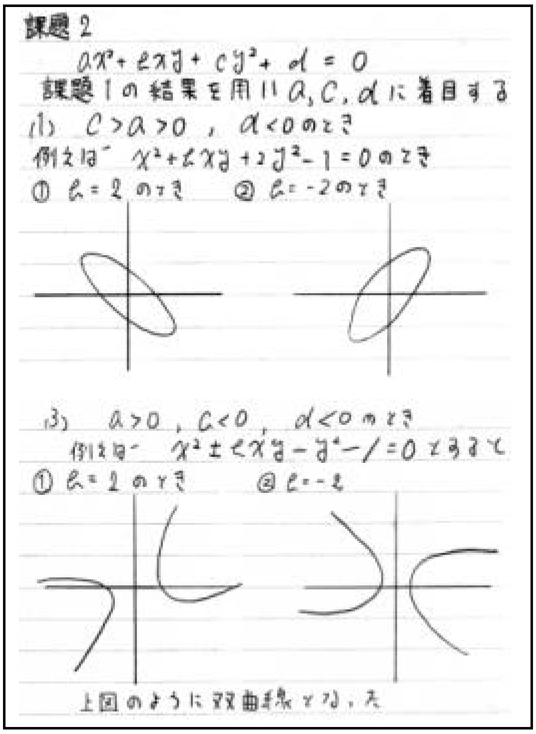
a,b,c の正負や大小に注目して整理した例です。もちろんこの後、双曲線に続きます。

4. 課題２のレポート例

$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$ の一般的な分類法を、出題した側も特に想定していいたわけではありません。a,b,c,d の値と曲線の形の関係に少し

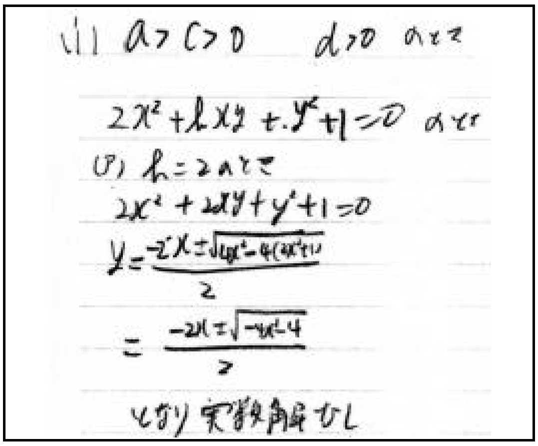
でも注目してくれればよいと考えていました。「例だけでいろいろな予想を記すのも OK。まとめができればよりナイス。」と指示した程度なのですが、こちらが検算に戸惑うような力作もいくつか登場しました。

まずレポート２はいくつかの具体例を示して、いろいろな曲線の形を調べたものです。一般化してまとめるところまでは十分至っていませんが、やはり a,b,c 等の正負や大小に注目して大変ていねいに追いかけていることがわかります。



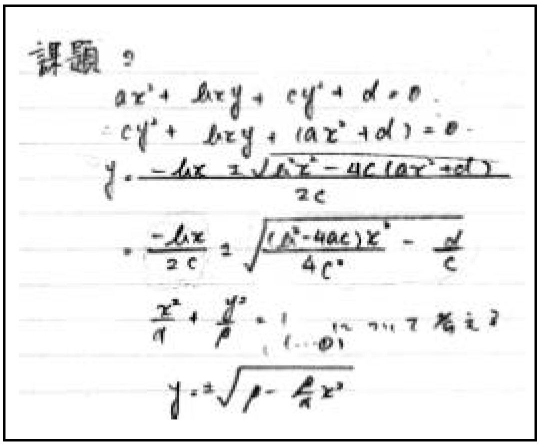
（レポート２）

電卓に入力するときに２次方程式の解の公式が必要ですが、実例だけを見ていると、ついうっかりレポート３のようなことが一般に言えそうに見えてきます。a,c,d が正のとき曲線はできないというもので、実際にはもう少し条件が必要なのですが、課題１のケースとも通じるところがあるのでなおさらです。しかし、こうした試み自体に意義があるように思われるのです。



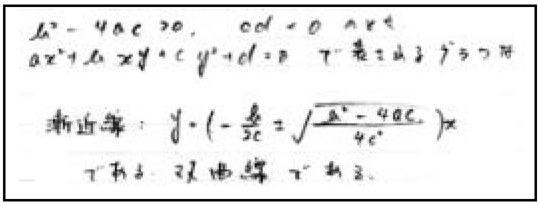
（レポート３）

そこで、解の公式をよりいっそう詳しく分析したレポートも登場します（レポート 4-1)。



（レポート４-1）

解の公式の右辺を二つの部分に分け、前半は直線 $y=-\frac{b}{2c}x$、後半が楕円や双曲線になる部分だと考えています。このレポートではα, βと a,b,c,d の関係をていねいに調べ出し、双曲

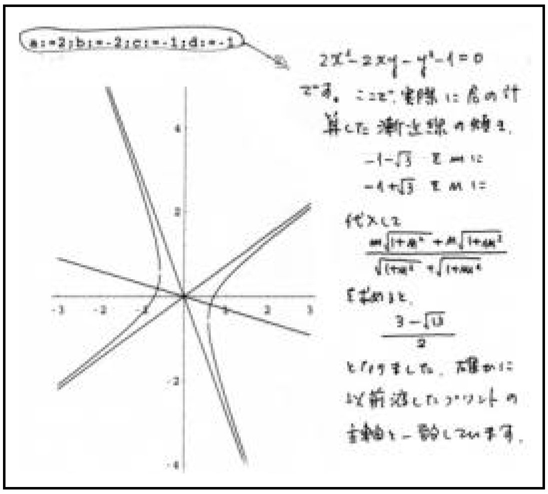


（レポート４-2）

線になるための条件とともに、（実際には猛烈

な計算ののちに）その漸近線の方程式を正しく導いているのです（レポート 4-2）。

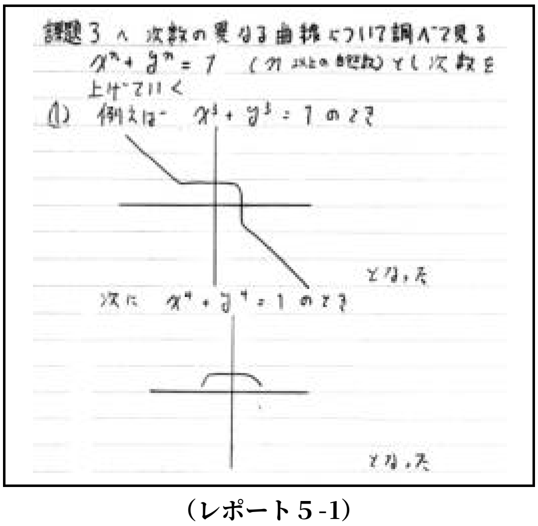
この生徒のレポートの最後は、2 本の漸近線のなす角の二等分線を使って双曲線の主軸を出そうという壮大なもので、未完ながら驚くべき計算力を示す結果となりました。図２は、レポートに沿って実例を調べた双曲線と漸近線、およびその主軸で、筆者がレポート返却の際につけたものの一部です。



（図２）

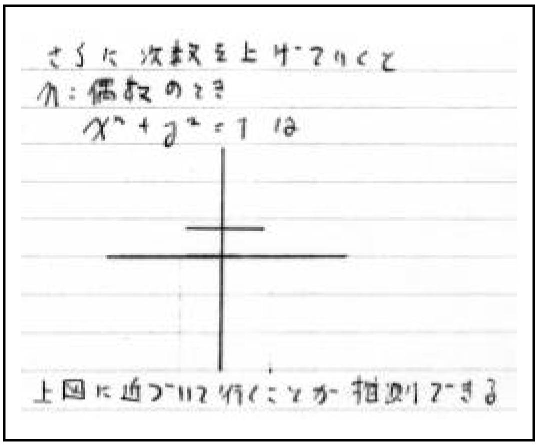
5. 課題３のレポート例

$x^n + y^n = 1$ の表す曲線の形を調べたのがレポート 5-1 です。



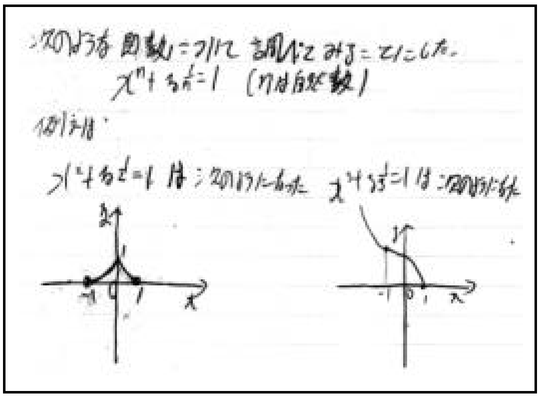
（レポート５-1）

ここから、奇数、偶数のそれぞれについて n の値が大きくなったときの曲線の形を予測するという展開です。レポート 5-2 は偶数の場合の例ですが、「曲線がだんだん直線に近づく?!」という不思議な現象に出会うことになります。



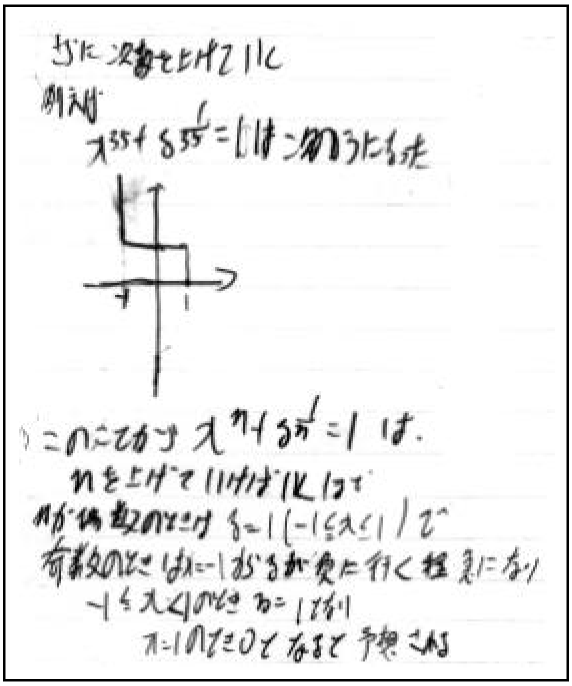
（レポート５-2）

なぜか $x^n + y^{\frac{1}{n}} = 1$ を調べたというレポートもありました（レポート 6-1）。よく考えるとこれは整関数なのですが、こういう好奇心こそ探究課題の最も望むところです。



（レポート６-1）

n を次第に大きくしていくとどうなるか...というのは自然に出てくるアイデアのようで、やはりこのレポートでも $n \to \infty$ の場合の予測を記していました（レポート 6-2）。



（レポート６-2）

6. レポートの評価

　このレポート課題の評価は、次のような五つの項目について各 2 点、計 10 点で行いました。

1	課題１の実例を示している
2	課題１のまとめ(一般化)を試みている
3	課題２の実例を示している
4	課題２のまとめ(一般化)を試みている
5	課題 3 への挑戦、その他の工夫がある

　例えばレポート 1 では、項目 1,2 について文句なしに 2 点ということです。レポート２では課題２について実例は十分ですがまとめがいま一つということで、項目 3 が 2 点、項目 4 が 1 点としました。レポート 4, 5, 6 ではそれぞれの懸命な探究を評価して、項目 5 を 2 点としました。

　探究の授業は生徒たちの生き生きとした学習の姿を垣間見ることができますが、私たちが目標とする「探究力」、あるいは「考える力」のようなものをどのように評価すればよいかは、まだまだ模索の状態です。この点についても種々のご意見をうかがうことができれば幸いです。