T^3 Japan 第６回年会（東京大会）2002　8／24・25

「漸化式と一般項のふるまい」

筑波大学附属駒場中・高等学校
駒野　誠

1.. 数学教育の理念と目標

数学教育の理念を筆者は次のように考えている。

「数学学習は、無限をいかに掴むかについて学習するが、その学習過程において、今までの自分にない新しい概念や認識を獲得し、明日の新しい自分の創造に資するものである。」

この『無限をつかまえる』とは、思考しているある事柄や複数の事柄に関係を見出すことであり、構造が見えてくることである。これは、「Local（局所的）と Global（大域的）の共生」であり、言い方を変えれば、「デジタル的な数学的表現とアナログ的な数学的表現との共生」である。ここに納得があり、創造がある。そこに学習者の面白さが隠れている。中・高での柱は、規則性を発見したり、思考しようとしている集まりについて分類したり、その構造を把握したりすることであり、日常欠かせない見方・考え方を獲得することと言ってよい。このことでそれまでの自分にはない新しい視点をゲットできたことになり、前期青年期の生徒にとって自己の成長を確認できるときである。これが、数学を学習する重要な意義である。役に立つとは、このようなグローバルな見方・考え方であって、損得勘定では決してない。　　　ここでは次の流れで楽しみたい。

２．漸化式の作成法　３．一般項の振るまい（２項間の比を中心に）４．ｎ次方程式の最大の解

2．樹形図の無限に潜む規則性と繰り返しの発見（漸化式の作成法）

樹形図を用いる基本的な考え方と指導

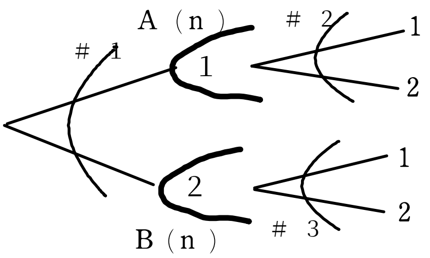
２種類の繰り返し選択自由な場合のモデルとして、
最もポピュラーで基本的な例〔フィボナッチ数列〕でまず説明する。

階段を１段または２段で昇るとき、n段昇る場合の数は何通りか？

次の図のような最もシンプルな樹形図を描く。求める場合の数を**F (n)** 通りとし、１段で始まる場合の枝の数を**A (n)** 通り、２段で始まる場合の枝の数を**B (n)** 通りとすると、

F (n) ＝A (n) +B (n) ＝ {A (n-1) +B (n-1)} + {A (n-2) +B (n-2)} ＝F (n-1) +F (n-2)；　F (1) ＝1，F (2) ＝2

数列は、　1，2，3，5，8，13，…・



〔この論文は 2001 年日本数学教育学会　埼玉大会で発表した続き〕数列の項の記号表現の提案：a_n は、添え字があり、初めての学習者には困難がつきまとう。そこで、　「ｎ段登る場合の数を F(n)とする」という定義がよいと考える。慣れてから、a_n に変えればよい。　すると、関数 F(n)で定義されていることの確認作業が大切になる。

【この樹形図指導上のポイント】

ｉ）同じ形はコピーして貼りつける！　このことが、自己相似〔Fractal〕の原点である。この問題では、最初の１，２の分岐**A (n) , B(n)**をコピーしておけばすむ。

ii）図で、分岐をまたぐライン＃１，＃２，＃３が描き入れてある。求める場合の数、すなわち**Tree**の枝の合計数**F (n)** をカウントしているのが＃１であり、＃２は、１から始まった場合に残り（ｎ－1段）を、再び１段または２段で昇ることになるが、その場合の合計数は、1 からの**Tree**の枝の数であり、それを＃２で示している。同様に、#3 は、2 から始まった場合に残り（ｎ－２段）を、再び１段または２段で昇ることになるが、その場合の合計数は、２からの**Tree**の枝の数であり、それを＃３で示している。これ以降の**Tree**の枝を省いても大丈夫であることを確認したい。この樹形図による漸化式作成方法に慣れれば、フィボナッチは最も基本的であることが分かる。

構造を掴む素晴らしさによって、数学学習の目的である、「無限をいかに掴まえるか」の例を学んだ。

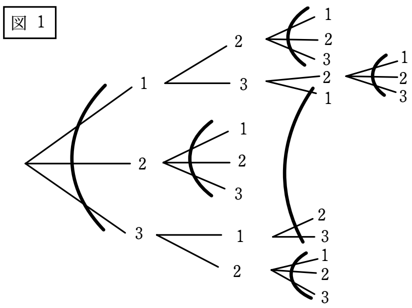
生徒自身がものの見方・考え方について新しい認識の変化が生じたことを確認させるために、作問課題が適している。

まず、樹形図の枝別れに条件がない場合を扱った。次に枝別れに異なる条件が付く場合の例を示す。

課題例　バスケットボールの得点は1点，2点，3点である。点の入り方も考慮すると、10 点が入る仕方は何通りか。ただし、1点と3点は、それぞれ連続しないものとする。

＜解答の考え方＞

図１



考え方１：**$10=1+2+2+2+3$**　などと分解し、条件を満たす並び替えの数を求める。すべてをもれなく数える工夫をすることに意義がある。
考え方２：樹形図を描いて、合計 10 になる枝の本数を数える。機械的であるが枝の数が多くなると図が大きくなり複雑になる。

この問題のねらいは、「無限をいかに掴むか」に対する『認識の変化の獲得』を理解してもらうものである。よって、答が見いだせたとしても、それがなされたとは言い難い。つまり、この問題は 10 点の場合が問われていたが、さらに９点や 11 点についても求めよとなると、すぐにはやる気が出ないだろう。全体像（構造）が見えないことには、“ わかった！ ”とは言えないのである。

図２

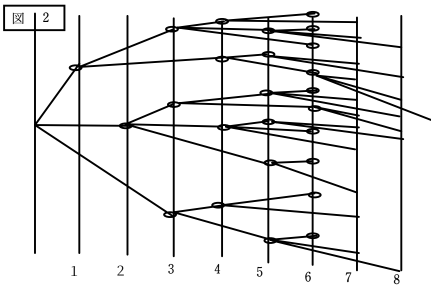


図１において、１点で始まりｎ点入る場合の数を **$A(n)$**通り、２点で始まりｎ点入る場合の数を **$B(n)$**通り、３点で始まりｎ点入る場合の数を **$C(n)$**通りとする。求める場合の数を **$F(n)$**通りとすると、**$F(n)=A(n)+B(n)+C(n)$**であり、

$F(n)=F(n-2)+F(n-3)+F(n-4)+F(n-5)+F(n-6)$

図２から、　**$F(1)=1,F(2)=1,F(3)=3,F(4)=4,F(5)=6,F(6)=10$**

であるから、　**$F(10)=59$**(通り)　答

これらから、数列 **1,1,3,4,6,10,15,24,38,59,93,.....**を得る。

逆に、具体的な数の列から、次の漸化式ア，イを生徒が発見した；

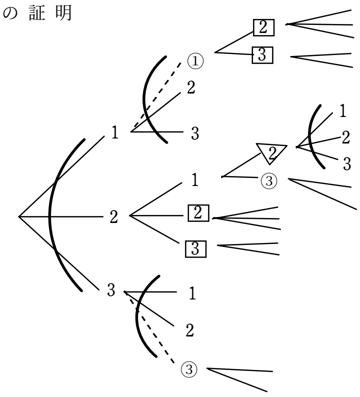
$F(n)=F(n-1)+F(n-3)+F(n-5)$　......ア

$F(n)=F(n-1)+F(n-2)-F(n-7)$　.....イ

同じ数列に対して、漸化式や事象の表現は一通りではなく、無限に存在するが、この場合に最も初期条件が少ないのがアである。

下図のような樹形図によって、ア，イの証明がされる；

ア の 証 明



アについて：

１点で始まりｎ点入る場合の数を **$A(n)$**通り、２点で始まりｎ点入る場合の数を **$B(n)$**通り、３点で始まりｎ点入る場合の数を **$C(n)$**通りとする。求める場合の数を **$F(n)$**通りとすると、

$F(n)=A(n)+B(n)+C(n)$

$=\{F(n-1)-A(n-1)\}+[A(n-2)+B(n-2)+C(n-2)]+\langle F(n-3)-C(n-3)\rangle$

$=\{F(n-1)-(B(n-2)+C(n-2)\}+[(B(n-3)+C(n-3))+B(n-2)+C(n-2)]+\langle F(n-3)-C(n-3)\rangle$

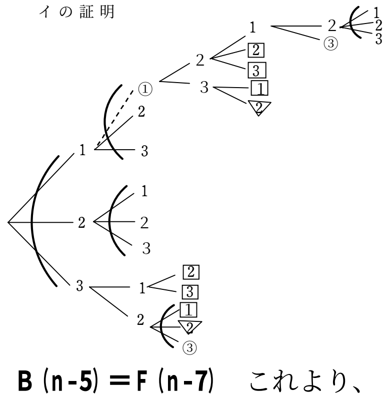
$=F(n-1)+B(n-3)+F(n-3)$

$=F(n-1)+F(n-5)+F(n-3)$　**q.e.d.**

右図で、ダミーの枝の③，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$を本枝の③，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$で打ち消している。$A(n),B(n),C(n)$と置かずとも、枝をまたぐ円弧の線によって、

$F(n)=F(n-1)+F(n-3)+F(n-5)$ を得る。

イ の 証 明



イについて：

$F(n)=A(n)+B(n)+C(n)=\{F(n-1)-\underline{A(n-1)}\}$

$+[F(n-2)]+\langle A(n-3)+B(n-3)\rangle$

ここで、$A(n-1)=B(n-2)+C(n-2)$，　$B(n-2)=A(n-4)+B(n-4)+C(n-4)$，　$C(n-2)=A(n-5)+B(n-5)$，　$A(n-4)=B(n-5)+C(n-5)$　，　$B(n-5)=F(n-7)$　これより、

$F(n)=F(n-1)-\underline{(B(n-5)+C(n-5)+B(n-4)+C(n-4)+A(n-5)+B(n-5))}+F(n-2)+\langle(B(n-4)+C(n-4))+F(n-5)\rangle$

$=F(n-1)+F(n-2)-B(n-5)=F(n-1)+F(n-2)-F(n-7)$　**q.e.d.**

丁寧に説明したので面倒に見えるが、対応する自己相似の部分が発見できれば、図を描くだけで、漸化式が作れるようになる。無限ループからの大脱出作戦でもある。漸化式を作る上で最も重要なことは、「......をＦ(n)とするとき、」をＦ(n)の定義文であると自覚することである。学校数学で、自分で、問題解決をする鍵となる定義をする機会は、「数学Ⅲ」以外では割と少ない。

3．漸化式の一般項の振る舞い

次に、繰り返し選択に条件が付くことによって、前後を考えるだけでは簡単に解決しない例を示す。

例1　直線上に並んだn点を２種類の結合記号＝と－で結ぶことにする。このとき、n点を２種類の記号で結合する仕方は、何通りか。　ただし、連続する３点以上を同じ結合記号で結ぶことはできない。

例えば、点２個：**0　0；0－0；0＝0**　３通り、

点３個：**0　0　0；0－0　0；0＝0　0；0　0－0；0　0＝0；0－0＝0；0＝0－0**　７通り

このことから：点と点を結ばない状態**0　0**をA，一で結んだ状態**0－0**をB，**＝**で結んだ状態**0＝0**をCとすると、例１はA，B，Cを、B，Cはそれぞれ連続しないように並べる問題に帰着される。

F（n）＝2F（n-1）+F（n-2）　；F（1）＝1，F（2）＝3，F（3）＝7　：数列　**1，3，7，17，41，99，…**

例えば、隣接２項間の比を**Excel**で比を計算してみると、次のような興味深い結果が予想できる。漸化式ができると、表計算ソフトやグラフ電卓ＴＩ８９などで新たな発見の可能性が出てくる。代数的面白さを体験できる。比以外に、$F(n+1)^2 - F(n)\cdot F(n-1)$ など様々に楽しめる。

F（n）＝2F（n-1）+F（n-2）において、$R(n)=\dfrac{F(n)}{F(n-1)}$ とおくと、$R(n)=2+\dfrac{1}{R(n-1)}$

n	F(n)=2F(n-1)+F(n-2)	F(n)/F(n-1)=R(n)	R(n)=2+1/R(n-1)			G（n）＝（1+1.4142135623731）＊G（n－1）		
			分子	分母	分子／分母	G(n)	IntG(n+0.5)	G(n)-F(n)
1	1					1.2071067811866	1	0
2	3	3.000000000000	2	1	2.000000000	2.9142	3	0
3	7	2.333333333333	5	2	2.500000000	7.0355	7	0
4	17	2.428571428571	12	5	2.400000000	16.9853	17	0
5	41	2.411764705882	29	12	2.416666667	41.0061	41	0
6	99	2.414634146341	70	29	2.413793103	98.9975	99	0
7	239	2.414141414141	169	70	2.414285714	239.0010	239	0
8	577	2.414225941423	408	169	2.414201183	576.9996	577	0
9	1393	2.414211438475	985	408	2.414215686	1393.0002	1393	0
10	3363	2.414213926777	2378	985	2.414213198	3362.9999	3363	0
11	8119	2.414213499851	5741	2378	2.414213625	8119.0000	8119	0
12	19601	2.414213573100	13860	5741	2.414213552	19601.0000	19601	0
13	47321	2.414213560533	33461	13860	2.414213564	47321.0000	47321	0
14	114243	2.414213562689	80782	33461	2.414213562	114243.0000	114243	0
15	275807	2.414213562319	195025	80782	2.414213562	275807.0000	275807	0
16	665857	2.414213562382	470832	195025	2.414213562	665857.0000	665857	0
17	1607521	2.414213562372	1136689	470832	2.414213562	1607521.0000	1607521	0
18	3880899	2.414213562373	2744210	1136689	2.414213562	3880899.0000	3880899	0
19	9369319	2.414213562373	6625109	2744210	2.414213562	9369319.0000	9369319	0
20	22619537	2.414213562373	15994428	6625109	2.414213562	22619537.0000	22619537	0
21	54608393	2.414213562373	38613965	15994428	2.414213562	54608393.0000	54608393	0
22	131836323	2.414213562373	93222358	38613965	2.414213562	131836322.9999	131836323	0
23	318281039	2.414213562373	225058681	93222358	2.414213562	318281038.9997	318281039	0
24	768398401	2.414213562373	543339720	2.25E+08	2.414213562	768398400.9993	768398401	0
25	1855077841	2.414213562373	1.312E+09	5.43E+08	2.414213562	1855077840.9983	1855077841	0
26	4478554083	2.414213562373	3.167E+09	1.31E+09	2.414213562	4478554082.9958	4478554083	0

n	T（n）＝0.5T（n-1）+0.5+1/T（n－1）		
	分子	分母	分子／分母
1	2	1	2.0000000000000
2	5	2	2.5000000000000
3	29	12	2.4166666666667
4	985	408	2.4142156862745
5	1136689	470832	2.4142135623747
6	1513744654945	627013566048	2.4142135623731
7	2,684,568,892,382,790,000,000,000	1,111,984,844,349,870,000,000,000	2.4142135623731

漸化式が生む新たな漸化式について考察対象：１）連分数展開、２）２項間の比（「はさみうちの原理」)、平均値の定理、ニュートン法、３）不動点（蜘蛛の巣法)、４）行列（固有値)、５）母関数と特性方程式、６）２項間近似漸化式　など。

1) 連分数展開： $R(n)=2+\dfrac{1}{R(n-1)}$ ＝ $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$ **有理数の列** $2,\dfrac{5}{2},\dfrac{12}{5},\dfrac{29}{12},\dfrac{70}{29},\cdots\to 1+\sqrt{2}$

2) 極限値への道

ア) 比の差の極限 (表：$R(n)$ の分子／分母の列)

$$R(n)-R(n-1)=\frac{1}{R(n-1)}-\frac{1}{R(n-2)}=-\frac{1}{R(n-1)\cdot R(n-2)}(R(n-1)-R(n-2))$$

$$=(\frac{R(n-1)-2}{R(n-1)})(R(n-1)-R(n-2))=(1-\frac{2}{R(n-1)})(R(n-1)-R(n-2))$$

ここで、 $2\le R(n)\le 3$ より、 $0\le 1-\dfrac{2}{R(n-1)}\le\dfrac{1}{3}$ 　であるから、

$$|R(n)-R(n-1)|\le\frac{1}{3}|R(n-1)-R(n-2)|\le\left(\frac{1}{3}\right)^2|R(n-2)-R(n-3)|\le\cdots\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}|R(2)-R(1)|\to 0\ (n\to\infty)$$

「はさみうちの原理」によって、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|R(n)-R(n-1)|=0$ 　・

イ) 一般項を求めて (これは、よく知られていて今回の目的ではない)

$F(n)=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\}$ 　　　分母子 $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ でわって、 　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}=1+\sqrt{2}$

ウ) ニュートン法 (表：$T(n)$)

F (n) ＝ 2 F (n-1) + F (n-2) において、 $y=f(x)=x^2-2x-1$ 　点 $(x_n,0)$ での接線の x 切片を x_{n+1} とすると、方程式は、 $y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$ 　ここで、 $x=x_{n+1}$, $y=0$ より、 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 　具体的に計算すると、 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x_n-1}$ 　を得る。 $x_1=2$ とすると、数列 $\{x_n\}$：$2,\dfrac{5}{2},\dfrac{29}{12},\dfrac{985}{408},\dfrac{1136689}{470832},\cdots$ (表参照)

$x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^2+1}{2(x_n-1)}$ ・ $x_n=\dfrac{p}{q}$ とおくと $x_{n+1}=\dfrac{p^2+q^2}{2q(p-q)}$ によって、分数列の各項の分母子を決定した。

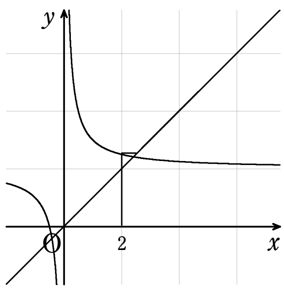
すると、 $R(n)$ のｎを 2^k $(k=0,1,2,,3,\cdots)$ 飛ばしで進む速い収束であることが実感できる。すごい！

エ) 平均値の定理の利用

$x=R(n),\ R(n+1)=f(x)$ とすると、 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$ 　ここで、 $f(x)=x$ を満たす正の数を α とおくと、

$|f(x)-f(\alpha)|=|f'(c)||x-\alpha|$ を満たす c が x と α の間に存在する。 　$|f(x)-\alpha|<\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$ 　より、

$|R(n+1)-\alpha|<\dfrac{1}{2}|R(n)-\alpha|$ 　よって、 $R(n)\to\alpha\ (n\to\infty)$



3) 不動点 (「蜘蛛の巣法」 表：$R(n)$ の分子／分母の数値の動き)

$x=R(n-1)$ 　とおき、 $f(x)=R(n)$ と定義すると、

$f(x)=2+\dfrac{1}{x}$ 　この関数の不動点を調べる：

$f(x)=x\Leftrightarrow 2+\dfrac{1}{x}=x$ 　これより、 $x>0$ 　である解は、 　$x=1+\sqrt{2}$

4) 行列 (固有値と極限値：特性方程式 (その1))

$\begin{pmatrix}F(n-1)\\F(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F(n-2)\\F(n-1)\end{pmatrix}$ 　$F(1)=1$, $F(2)=3$ 　　$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 　とおくと、

$A-kE=O \Leftrightarrow$ 固有方程式　$k^2-2k-1=0 \Leftrightarrow k=1\pm\sqrt{2}$ （固有値）

$\begin{pmatrix} F(n-1) \\ F(n) \end{pmatrix} = A^{n-2}\begin{pmatrix} F(1) \\ F(2) \end{pmatrix}$ と、A^{n-2} を求める問題に帰着される。

5) 母関数 (generating function 特性方程式 (その2))

$F(n)=2F(n-1)+F(n-2)$ ＊，$F(1)=1, F(2)=3$　ここで、$F(x)=F(1)+F(2)x+F(3)x^2+F(4)x^3+\cdots$ とおく。

$xF(x)=\qquad F(1)x+F(2)x^2+F(3)x^3+F(4)x^4+\cdots$ と $(2+x)F(x)=2F(1)+(2F(2)+F(1))x+(2F(3)+F(3))x^2+\cdots$

より、$(2+x)F(x)=2F(1)+(F(3))x+(F(4))x^2+\cdots$ ＊より、

$(2+x)F(x)=2F(1)+\dfrac{F(x)-(F(2)x+F(1))}{x}=2+\dfrac{F(x)-(3x+1)}{x}$　ゆえに、$F(x)=\dfrac{1+x}{1-2x-x^2}$ これを部分分数分解する：$F(x)=\dfrac{A}{1-\alpha x}+\dfrac{B}{1-\beta x}$ 、ここで、α,β は、$\alpha\beta=-1, \alpha+\beta=2$ を満たす $t^2-2t-1=0$ の解である。$\alpha=1+\sqrt{2}, \beta=1-\sqrt{2}$ **．すると、**$A=\frac{1}{2}\alpha, B=\frac{1}{2}\beta$ で、$F(x)$ の x^{n-1} の係数から、$F(n)=\frac{1}{2}\left\{\alpha^2+\beta^n\right\}$

6) 2項間近似漸化式の作成 (初期値 (無理数) の決定) (表：$G(n)$ の列)

漸化式 $F(n)=2F(n-1)+F(n-2)$ **，** $F(1)=1, F(2)=3$ を $G(n)=(1+\sqrt{2})G(n-1)$, $G(1)=$ **1.2071067811866…**
１次独立な固有値は $1\pm\sqrt{2}$ の２つであるから、§３の２）のイ）と表現される。それをあえて、$1+\sqrt{2}$ のみの表現に挑戦した。この問題の場合、$\beta=1-\sqrt{2}=-0.41213562\cdots$ であり、$\frac{1}{2}\beta^n$ が整数に影響を及ぼさないからである。しかし、一般に $G(1)$ の正体は簡単ではない。この初項によって、$F(n)$ と一致する項が増えていく。『漸化式ゲーム』として、時間内に何項まで一致させられるか競争する面白さもある。

紙面の都合で例２～例４は問題とその漸化式のみを挙げる：

例２　ラグビーの得点を考えてみよう。トライで５点、そのときキック権が与えられ、ゴールポストを通過すると、２点追加される。これとは独立に、ペナルティーキックは３点である。ｎ点入る仕方は何通りあるか。

F(n)＝F(n-3)＋F(n-5)＋F(n-7)；F (1) ＝0，F (2) ＝0，F (3) ＝1，F (4) ＝0，F (5) ＝1，F (6) ＝1，F (7) ＝1

例３　大相撲、15 日間で３連敗しない場合は、何通りあるのか。

ｎ日間 **F (n) ＝F(n-1)+F(n-2)+F(n-3)；F(1)=2，F(2)=4，F(3)=7**　；数列 2，4，7，13，24，44，81，149，. . .
F (15) ＝10609　この漸化式は、階段のぼり｛１段，２段，３段を自由に｝と同じである。

例４　ある壁に正方形のタイルを水平に敷き詰めることになった。色は赤、緑、黄色の３色である。ただし、赤の次はどの色でもよいが、緑の次は赤か緑、黄色の次は赤と決めた。ｎ枚の敷き詰め方は何通りあるか。

F (n) ＝F (n-1) +F (n-2) + {F (n-1) - F (n-3)} ＝2F (n-1) +F (n-2) - F (n-3) ；F(1)=3，F(2)=6，F(3)=14；
数列：　**3，6，14，31，70，157，…．**　F (n) ＝F (n-1) +3F (n-2) - F (n-4)　；F (1) ＝3，F (2) ＝6，F (3) ＝14，F (4) ＝31

4．n次方程式の最大の解

例 5　1×3の長方形、2×3の長方形、3×3の正方形の畳を、縦3・横20の長方形の部屋に敷き詰めたい。敷き詰め方は何通りあるのだろうか？

１×３を横で使うとき→ｙ，１×３を縦で使うとき→ｔ　，２×３を横で使うとき→Ｙ　，
２×３を縦で使うとき→Ｔ，３×３を使うとき→Ｓ　　と、使う種類を記号化すると、樹形図は図のようになる。　よって、漸化式：$F(n)=F(n-1)+F(n-2)+4F(n-3)$, $F(1)=1$, $F(2)=2$, $F(3)=7$

この特性方程式　$t^3-t^2-t-4=0$ の実数解はグラフ電卓 TI89 を使って、Solve($t^3-t^2-t-4=0, x$) と入力すると、実数解が 2.241896530345 と表示される。漸化式は、ｎ次方程式の最大の近似解を求めるときに使えるではないか。$f(t)=t^3-t^2-t-4$ とおくと、$f(2)<0$, $f(3)>0$ より、実数解αは、
２＜α＜３　．特性方程式により、解をα、β、$\overline{\beta}$ とすると、初期条件より、

$F(n)=C_1\alpha^n+C_2\beta^n+C_3\overline{\beta^n}$　とおけて、$\dfrac{F(n+1)}{F(n)}=\dfrac{C_1\alpha^{n+1}+C_2\beta^{n+1}+C_3\overline{\beta^{n+1}}}{C_1\alpha^n+C_2\beta b^n+C_3\overline{\beta^n}}\to\alpha\ (n\to\infty)$

証明）$\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ， $r > 0$ とおくと、解と係数の関係より、 $\alpha+\beta+\bar{\beta}=\alpha+2r\cos\theta=1$, $\alpha\beta\bar{\beta}=4$ 　より、

$r\cos\theta=\frac{1-\alpha}{2}$ ，　$|r\sin\theta|=\sqrt{r^2-(r\cos\theta)^2}=\sqrt{\frac{4}{\alpha}-(\frac{1-\alpha}{2})^2}$

これによって、３つの解は、

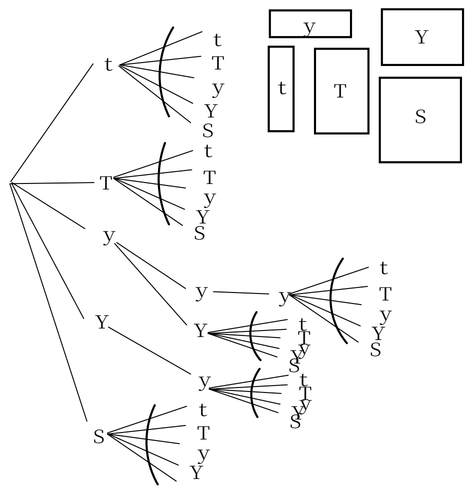
α ，$\beta=\frac{1-\alpha}{2}+\sqrt{\frac{4}{\alpha}-(\frac{1-\alpha}{2})^2}\,i$ ，$\beta=\frac{1-\alpha}{2}-\sqrt{\frac{4}{\alpha}-(\frac{1-\alpha}{2})^2}\,i$ 　である。

$$r^2=|\beta|^2=\left\{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2+\frac{4}{\alpha}-\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\right\}=\frac{4}{\alpha}$$

ここで、 $\alpha>2$ であるから、 $\frac{r}{\alpha}=\frac{2}{\alpha\sqrt{\alpha}}<1$ より、

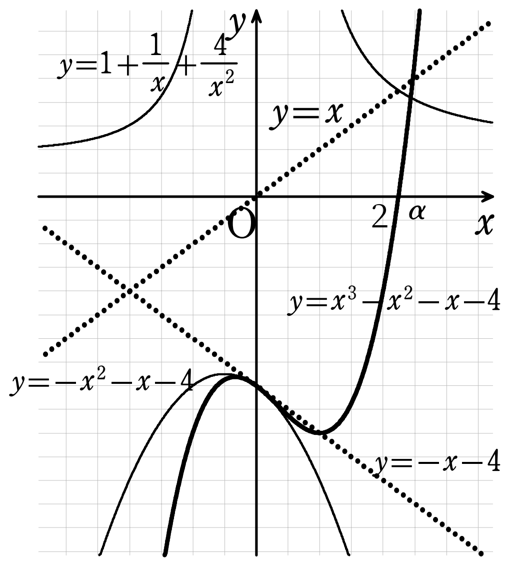
$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=\left(\frac{r}{\alpha}\right)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left(\frac{r}{\alpha}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\to 0(n\to\infty)$$

$\left(\frac{\bar{\beta}}{\alpha}\right)^n$ も同様である。よって、 $\frac{F(n+1)}{F(n)}\to\alpha\ (n\to\infty)$ 　q.e.d.



＜TI98 で c Solve で計算させると、$\alpha\approx 2.2418965$, $\beta\approx -0.6209482+1.1826355\,i$, $\bar{\beta}\approx -0.6209482-1.1826355\,i$ が出力されるが、c Solve でなくとも表計算 Excel か TI89 の数列機能で、実数解 α を求めておくと、β は次のようにして求められる：$\beta=p+qi$ （ p , $q\in R$ ）とおくと、 $\alpha+2p=1$ より p が求まり、 $\alpha|\beta|^2=4$ から q が求められる。＞

n	F(n)	F(n+1)/F(n)
1	1	
2	2	2
3	7	3.5
4	13	1.857142857
5	28	2.153846154
6	69	2.464285714
7	149	2.15942029
8	330	2.214765101
9	755	2.287878788
10	1681	2.226490066
11	3756	2.234384295
12	8457	2.251597444
13	18937	2.239210122
14	42418	2.23995353
15	95183	2.243929464
16	213349	2.241461185
17	478204	2.241416646
18	1072285	2.242317086
19	2403885	2.241834027



$x^3-x^2-x-4=0 \iff x=1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}$

$y=x^3-x^2-x-4$ 　のグラフ

$y=x$ と $y=1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}$ のくもの巣

５．おわりに

　この論文の前半は、中学２年・３年を対象に指導した『無限をいかにつかまえるか』のひとつである。無限ループからの脱出に「漸化式」があり、そこに生徒が興味をもって取り組んだ。生徒の課題作品には面白い発想がある。これは、筆者の教材の中でも上位にランクするものである。今年度は「数学Ⅲ」の授業をしている。ねらいを、『事の理解は自分の既知のもので認識する以外に手はない』ことから、「級数」においている。テーラー級数、フーリエ級数、母関数などが「目から鱗」を促すと信じている。この論文の後半は、その中の一部である。§３の６）がデジタルの表現のひとつである。