

演示用ツールとしてのCBLの活用

梅野 善雄*

一関工業高等専門学校

1 はじめに

グラフ電卓とデータ収集器 CBL とを併用すれば、現実世界の中で「関数」がどのように現れているかを、その場で収集した実データをもとに理解させることができる。幾つかの高校や高専では、データ収集から解析までを生徒に実験させ、グループごとに結果を発表させる新しいスタイルの授業が行われている。数学と物理とを融合させた画期的な試みといえよう。

しかし、そのような授業に関心があったとしても、グラフ電卓を生徒の人数分取り揃えること自体が大きな難問になっているのが、多くの学校の現状ではないだろうか。そして、実験グループの数だけ CBL 一式を取り揃えるというのは、さらなる難問として残ることになる。また、多くの数学教師は、このような機器を利用して実験を伴う授業を行ったことがない。その意味では、機器類の整備以前に、それを自分で行ってみようと思うまでの教師側の意識の問題が最大の問題であるかもしれない。

本校では、数式処理電卓 TI-89 はある程度の台数が揃ったが、CBL は 2 台しかない。したがって、著者自身も、CBL を利用した授業経験は数えるほどしかないが、その数少ない授業経験だけからでも、生徒の反応は十分すぎるほど感じ取ることができた。生徒の目前で収集されたデータが実際の関数とあてはまることをその場で示すことができれば、それだけでも教室には大きな感動が湧きあがる。その意味では、グラフ電卓と CBL が 1 台ずつしか無い場合でも、十分大きな効果を見込むことができるだろう。そのデータ解析に数式処理機能も併用できれば、さらに大きな効果が期待できる。

そこで、ここでは、教師がグラフ・数式処理電卓 TI-89(または、TI-92Plus) と CBL とを各 1 台ずつ所有しているが、それらを生徒に利用させるだけの台数はない場合について、その利用例を紹介したい。

2 データ収集器 CBL 2

2.1 データ収集器 CBL 2

グラフ電卓のオプション機器として、データ収集器 (CBL, Calculator-Based Laboratory) が用意されている。それを TI-89 と接続すれば、CBL にいろいろなセンサーを接続して実データを簡単に収集できる。最新型の CBL 2 はより利便性が向上し、TI-89 と一体化させて利用できる。従来は各種のセンサーごとに用意されていたデータ収集用プログラムがある程度共通化された。また、プログラムの知識がなくともデータ収集のタイミングを簡単に変更できるようになっている。

CBL 2 は、最大 50,000 個/秒 の速度でデータを収集できる。電卓と接続しているときは、データは電卓側に自動的に送信されるが、CBL 2 単体でもデータを収集できる。4 個の接続用チャネ

*021-8511 一関市萩荘字高梨 一関工業高等専門学校, E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp

表 1: 使用できるセンサー

距離センサー	圧力センサー	音センサー
熱電対温度センサー	デジタルコントロールユニット	色センサー
2 レンジ力センサー	伝導率センサー	力センサー
イオン分離電極	イオン分離電極増幅器	流率センサー
磁界センサー	計測器電圧増幅器	水の濁りセンサー
低- <i>g</i> 加速度計	25- <i>g</i> 加速度計	加速度センサー
CO ₂ センサー	O ₂ センサー	pH システム
電流・電圧センサーシステム	フォトゲート	ステンレス製温度センサー
相対湿度センサー	溶解酸素センサー	生物圧力センサー
空気圧センサー	呼吸圧センサー	呼吸モニターベルト
心電図センサー	運動心拍数	気圧計
直付け温度センサー	温度センサー (超長形)	放射能モニター

ルがあり, 3 個はセンサー用のアナログチャンネル, 1 個は音波・双方向のデジタルチャンネルである。複数のチャンネルを使って, 異なるデータを同時に収集することもできる。表 1 のような多数のセンサーが使用でき, それらは自動認識される。

2.2 グラフ電卓と CBL 2 との接続

旧型の CBL では, センサーを接続するごとに, そのセンサーを通したデータ収集に必要なプログラムを手動でオープンして実行する必要があった。CBL 2 は, 接続されているセンサーを自動認識し, 必要とされるプログラムが自動的に組み込まれる。以下は, CBL 2 をグラフ・数式処理電卓 TI-89 と接続後, センサーが自動認識されるまでの流れを述べたものである。

- (1) TI-89 と CBL 2 をコードで接続する。
- (2) CBL 2 の transfer を押すと, CBL 2 は接続されているグラフ電卓を自動認識し, 対応するデータ収集用の基本プログラム群 (DataMate) をグラフ電卓に転送する。
- (3) CBL 2 にセンサーを接続する。
- (4) グラフ電卓側で, 転送されたプログラム「DataMate」を実行すると, CBL 2 は接続されているセンサーを自動認識し, そのセンサーによるデータ収集のタイミング等を適切に設定する。また, グラフ電卓の液晶画面の上部には, 認識されたセンサーの種別が表示される。

3 CBL 2 によるデータ収集例—温度センサー—

温度センサーを例にとり, ニュートンの冷却の法則について考える。周知のように, 物体の温度を θ , 周囲の温度を θ_0 , そして時間を t で表すと, ニュートンの冷却の法則は,

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_0) \quad (k > 0) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

という微分方程式で表される。簡単な微分方程式の応用例として取り上げられるが, この法則を実際実験することはあまり多くはないと思われる。しかし, CBL 2 を利用すると, 温度変化の様子を教室で簡単に実演してみせることができる。データ収集用のプログラム DataMate が TI-89 側に転送済みの場合, データ収集の手順は以下のとおりである。

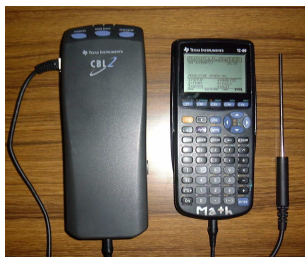


図 1: CBL との接続

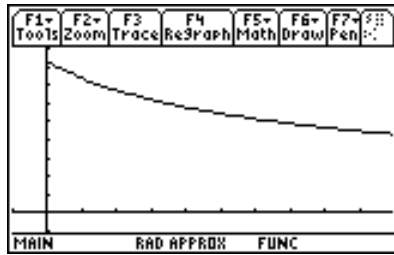


図 2: 温度変化の様子

F1→ Tools	F2→ Plot Setup	F3→ Cell	F4→ Header	F5→ Calc	F6→ Util	F7→ Stat
DATA						
	c1	c2	c3			
1	0.	83.2	0.			
2	1.	81.875				
3	2.	80.882				
4	3.	79.938				
r1c2=83.2						
MAIN RAD APPROX FUNC						

図 3: 温度変化のデータ

- (1) CBL 2 と温度センサーを接続する (図 1)。
- (2) TI-89 側でデータ収集プログラム DataMate を実行する。
- (3) メニュー画面で「2: START」を押すとデータが収集されてリアルタイムでグラフ表示され、そのデータは TI-89 に CBLDATA というファイル名で自動的に転送される。

使用した温度センサーは、 $-20^{\circ}\text{C} \sim 125^{\circ}\text{C}$ の範囲の温度を測定できる。測定誤差は、 0°C では $\pm 0.2^{\circ}\text{C}$ 、 100°C では $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ である。 $-200^{\circ}\text{C} \sim 1400^{\circ}\text{C}$ まで測定可能なセンサーもある。複数 (最大 3 個まで) のセンサーからデータを一度に収集でき、それらの相互関係について考察することも容易である。

図 2 は、温度センサーを熱して、その後に大気中に放置した場合の温度変化を表している。図 3 は、TI-89 に自動転送されたデータ行列である。c1 は時間、c2 は温度であり、1 秒ごとに 99 秒までのデータが得られている。1 秒あたりに収集するデータ数や収集時間は、簡単に変更できる。

4 収集したデータの解析例

収集したデータに対しては、いろいろな統計処理が可能である。エクセルと同じような表計算が可能なので、データにいろいろな加工を施して分析することができる。

図 4 は、c3, c4, c5 を以下の式で計算したものである。

列	計算式	コマンド
c3	$\Delta\theta = \theta(t) - \theta(t-1)$	$c3 = \text{seq}(c2[i] - c2[i-1], i, 2, 100)$ $c3 = \text{shift}(c3)$
c4	$\theta(t) - \theta_0, \theta_0 = 25.14$	$c4 = \text{seq}(c2[i] - 25.14, i, 1, 99)$
c5	$-\frac{\Delta\theta}{\theta(t) - \theta_0}$	$c5 = \text{seq}(-c3[i]/c4[i], i, 1, 99)$

F4→ Tools	F5→ Plot Setup	F6→ Cell	F7→ Header	F8→ Calc	F9→ Util	F10→ Stat
DATA						
	c3	c4	c5			
1	undef	58.06	undef			
2	-1.325	56.735	.02335			
3	-.9926	55.742	.01781			
4	-.9449	54.798	.01724			
c5=seq(-c3[i]/(c4[i]), i, 1, 99)						
MAIN RAD APPROX FUNC						

図 4: 温度変化と温度差

F1→ Tools	F2→ Plot Setup	F3→ Cell	F4→ Header	F5→ Calc	F6→ Util	F7→ Stat
DATA						
FORMATS						
1	Cell Width 6					
2	Auto-calculate 1: OFF					
3	Enter=SAVE		2: ON		L	
4	-.9449		54.798		.01724	
c5=seq(-c3[i]/(c4[i]), i, 1, 99)						
MAIN RAD APPROX FUNC						

図 5: 自動計算の設定

main\cbl1data Plot 2	
Plot Type	xyline
Mark	Dot
X	c1
Y	c5
Use Free and Categories?	NO
Include Legend?	NO
Include Legend?	NO
Enter=SAVE ESC=CANCEL	
MAIN RAD APPROX FUNC	

図 6: グラフ表示の設定

図4の c_3 は、1秒ごとの温度変化を求めた後に、行を1つずつずらした (Shift) ものである。 c_4 は室温 (25.14°C) との温度差、そして、 c_5 はそれらの比である。室温 θ_0 は、センサーを熱する前に室内温度のデータを100個収集し、その平均として求めた。なお、デフォルトではヘッダーに計算式を定義しても計算されない。計算式を定義後は、 \blacklozenge \square を押して自動計算機能を \square ON にしておく必要がある (図5)。

ニュートンの冷却の法則は、単位時間あたりの温度変化 (c_3) が、その時間の物体の温度と周囲の温度との差 (c_4) に比例するというものである。そこで、この温度変化と周囲の温度差との比 c_5 をグラフ表示させてみよう。表データの特定の列をグラフ表示させるには、表画面で \square F2 (Plot Setup) を押し、グラフ表示の設定を記憶させたい Plot 番号を \blacktriangle \blacktriangledown で選択して \square F1 (Define) を押す。図6は、Plot 2に、 c_1 を x 軸、 c_5 を y 軸にとり、dot 印を直線 (xyline) で結んでグラフを描画するように指定したものである。指定したグラフを表示させるには、 \square ENTER を何回か押して表データの画面に戻ってから \blacklozenge \square F3 を押す。

このとき、 c_1 と c_5 の行数が合わないとエラーになるので、あらかじめ行数を揃えておく。このデータの場合は、次のデータとの差を取ってからデータをシフトをしているので、データ数が1つずれている。そこで、表画面の100行目を削除する。行を削除するには、100行目にカーソルをあてて \square F6 2 を押して「2: row」を選択すればよい。ただし、ヘッダーの計算式に削除しようとする行が使用されていると、その列の該当するセルは削除されない。表データはヘッダーの計算式を削除しても残るので、一つの行全体を削除するには、ヘッダーの計算式を削除してから行った方がよい。

さて、行数がそろっていれば、 c_1 と c_5 の関係を表すグラフは、 \blacklozenge \square F2 で描画範囲を指定すれば即座に描画される。図7は、 $-10 \leq x \leq 100$ 、 $-0.01 \leq y \leq 0.03$ の範囲で描画させた。時間がたつにつれて増加・減少する傾向は特に認められない。念のため、 c_5 のデータを直線 $y = ax + b$ で回帰してみる。 \square APPS 6 で「1: Current」を選択して表データに戻る。 \square F5 を押して統計機能の直線回帰「5: LinReg」を選択し (図8)、 x には c_1 を、そして y には c_5 を指定して \square ENTER を押すと、 $y = ax + b$ の形の直線回帰が行われ a 、 b の値が表示される (図9)。 $a = -8.57033 \times 10^{-5}$ 、 $b = 0.1617$ であり、この回帰直線の傾きは、ほとんど0であることが分かる。そこで、 \square F5 1 (OneVar) を利用して、比例定数 k を c_5 の平均として求めると、 $k \approx 0.011925$ となる。

以上のことより、温度変化に関して、単位時間あたりの変化率が室内との温度差に比例し、その比例定数は $k = 0.011925$ であることが予想される。これにより、①の微分方程式が成立することが実験的に確かめられたことになる。そこで、次に、TI-89の数式処理機能を利用して、この

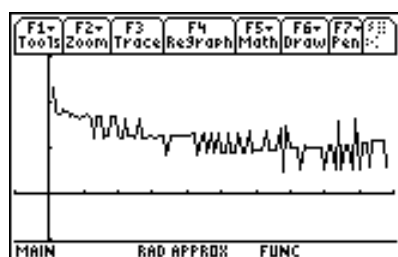


図7: 比例定数の変化

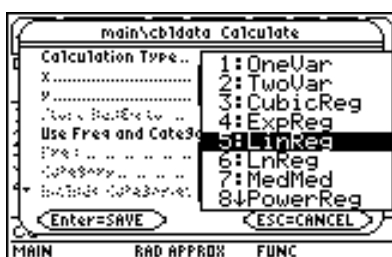


図8: 実データと回帰直線



図9: 回帰係数の値

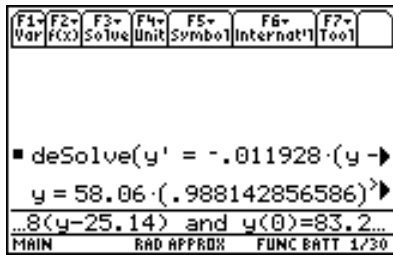


図 10: 微分方程式の解法

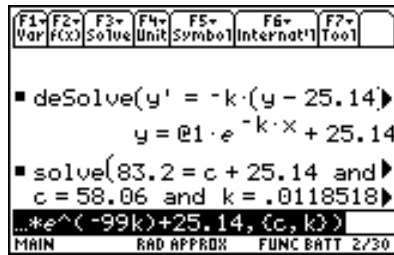


図 11: 境界条件と定数決定



図 12: 指数回帰

微分方程式を解いてみよう。あるいは，簡単な変数分離形であるから生徒に解かせてもよい。

図 10 では，

$$\frac{dy}{dx} = -0.01925(y - 25.14), \quad y(0) = 83.2$$

を解いて，

$$y = 58.06(0.988142856586)^x + 25.14 \quad \dots\dots\dots ②$$

が得られている。なお， $0.98814 = \exp(-0.011925)$ である。図 11 の最初では， $\theta_0 = 25.14$ のもとで，①の一般解を求めている。@1 は任意定数である。つまり，①の一般解は， t, θ を用いると

$$\theta(t) = C \cdot \exp(-kt) + 25.14 \quad \dots\dots\dots ③$$

と表される。図 11 の後半の部分では，求められた解 $y = C \cdot \exp(-k \cdot x) + 25.14$ に対して，境界条件により定数 C, k の値を求めている。それは， $y(0) = 83.2, y(99) = 43.1$ より，連立方程式

$$83.2 = C \cdot e^0 + 25.14, \quad 43.1053 = C \cdot e^{-99k} + 25.14$$

を解くことになる。この部分も，生徒に求めさせることができるだろう。 $k = 0.01185$ であり， $c5$ の平均として求めた値とかなり近い値であることが分かる。したがって，この境界条件より求めた①の解は，

$$\theta(t) = 58.06 \cdot \exp(-0.011849t) + 25.14 \quad \dots\dots\dots ④$$

である。

一方，TI-89 の表データに対する統計機能 [F5] を利用して，時間 $c1$ に対する周囲との温度差 $c4$ を $y = a \cdot b^x$ の形で指数回帰 (4: ExpReg) すると， $a = 53.066, b = 0.98868$ が得られる (図 12)。

$$(0.988681)^t = \exp(\ln(0.988681^t)) = \exp(-0.011384t)$$

であり， $c4$ は周囲との温度差であることから，

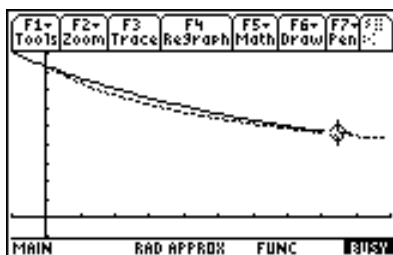


図 13: 解曲線②

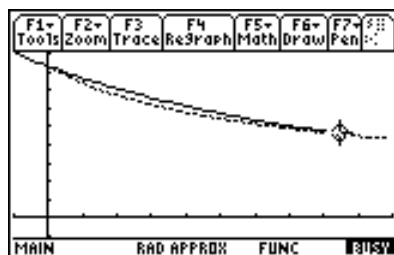


図 14: 解曲線④

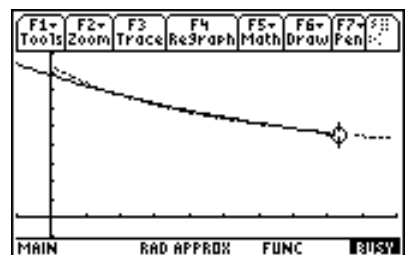


図 15: 解曲線⑤

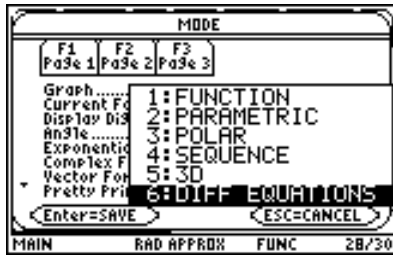


図 16: MODE の変更

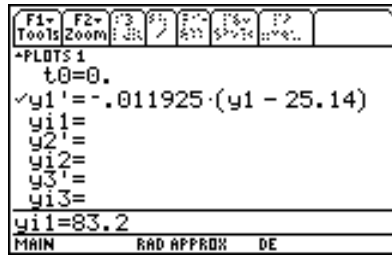


図 17: 微分方程式の定義

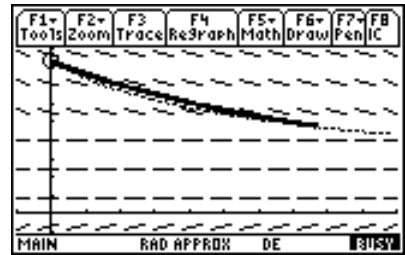


図 18: 勾配場と解曲線

$$\theta(t) - 25.14 = 53.066 \cdot (0.988681)^t = 53.066 \cdot \exp(-0.011384t)$$

である。したがって、この場合の温度 $\theta(t)$ は、

$$\theta(t) = 53.066 \cdot \exp(-0.011384t) + 25.14 \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

と表される。図 13～15 は、これら 3 つの解曲線を、収集されたデータ曲線と比較したものである。

さて、一階微分方程式①についての理解を深めるには、その勾配場について理解することも必要であろう。TI-89 は、微分方程式の勾配場や位相平面図も描画できる。

それには、まず、グラフモードを微分方程式に変更することが必要である。MODE を押して、Graph の箇所ですべて「6: DIFF EQUATION」を選択する(図 16)。次に微分方程式を定義するため、F1 を押して、 $y' = -0.011925(y - 25.14)$ 、 $y(0) = 83.2$ を指定する(図 17)。図 18 は、この微分方程式の勾配場と、初期条件 $\theta(0) = 83.2$ のもとでの解曲線を描画したものである。勾配場を表示している画面上で初期値を指定すれば、そこを出発点とする解曲線を描画させることもできるので、微分方程式の意味を理解させるときに極めて有効である。

5 予想される教育効果

以上で述べたように、数式処理電卓とデータ収集器とを利用すると、実データが容易に収集でき、即座に統計的に解析することができる。このような電卓とデータ収集器とを併用すれば、授業の途中で簡単な実験を実際にやってみせることができるだろう。黒板でいろいろな式変形の後に導かれた式が、実際のデータと合致していることをその場で実演してみせることができれば、生徒の理解度が大きく向上することが期待される。

逆に、ある法則を導きたいときに、収集された実データをさまざまに加工してグラフ表示しながら、その法則を導くにいたる思考過程を説明することもできる。この電卓を全員が所持している場合は、その法則性を考察させる方向で、データ解析の演習をさせることもできるだろう。あるいは、データ収集から法則発見までを課題とすることもできる。ただし、具合のよいデータを収集するには、ある程度の試行錯誤が必要なときもある。そのようなときは、あらかじめ教師側が収集したデータを転送して、データ解析だけを課すことも考えられる。

いずれにしても、実データの収集やそのさまざまなデータ解析が、パソコンに向かわずとも可能になることの意義は大きい。教師の演示用としてだけの利用であったとしても、数学と実データとの関りを理解させる上で極めて効果的なツールと思われる。