

計算のない数学教育

渡辺 信

Watanabe@scc.u-tokai.ac.jp

1. 人間みなコンピュータ？

大学の線形代数の授業も終わりに近づき、幾つかの質問を受ける。連立一次方程式の解法は、計算ばかりでつまらない。掃き出し法を行うことによって、連立方程式を解く問題である。この解法は計算機に連立方程式を解かせる方法であって人がやることではない。現在の数学教育では、人はみんな小さなコンピュータであることが求められている。何をやっているか解らないけれど、言われたとおり計算すれば答えが求まる。計算をしているときには、何も考えずに行っているが、解らないことを規則に従って計算するのはむなしのではなかろうか。それでも計算をすることが数学と思い込んでいるのであれば、数学を勉強したと思うかもしれない。連立一次方程式を解く非常にめんどくさい例をあげたい。

$$2x + 5y + 4z = -3$$

$$7x - 8y + 3z = 5$$

$$-5x + 7y + 7z = -8$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 5 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 30/73 \\ 7 & -8 & 3 & 5 & \rightarrow & 0 & 1 & 0 & -31/73 \\ -5 & 7 & 7 & -8 & 0 & 0 & 1 & -31/73 \end{array}$$

この途中計算の煩わしさ

数学教育が目指していることは、このような複雑な計算ができることであろうか。連立方程式が解けることが重要な課題ではあるが、

計算だけが複雑になって、数学として得るものはない。数学の本質は数学の細かい計算法や技巧ではなく、何を考えて、何を解きたいのか、そして解いた結果から何が得られるのかを問いたい。このような計算をすることによって、数学の評価をすることは正しいとは思えない。数学の力は全く付いていないことは、今までの学校教育が物語っている。それでも、このような計算をやらなくてはならないのであれば、計算はすべてを機械に任せてもよい。

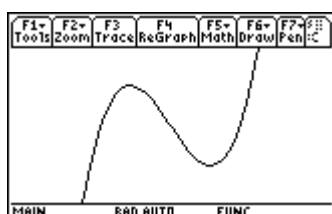
2. 不思議とは思わない加速度の符号

数学のモデルを人が運動することとして、グラフと関数との関係を説明した。歩いている位置の問題殻、微分をすることによって、速度・加速度を位置と対応つけることができる。グラフを見て、人が歩いている状態を説明しながら気がついたことは、微分計算ができてグラフが語ることを読みきれないということであった。『だんだんと早くなっている』にもかかわらず、『加速度にはマイナスが対応』することの不自然さを発見することは難しかった。数学モデルがなかったならば、このような不自然さを発見することは不可能であり、数学の計算結果に疑問を持つこともない。すべてがわかっているというような状況で先に進んでいってしまっている可能性がある。グラフを書くことによって、より具体的に説明する。

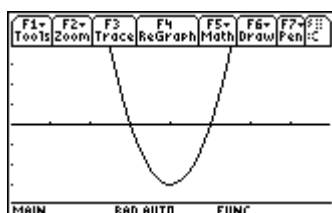
数学モデル

ある地点を出発しだんだん遅くなって、A地点まで進み、そこから引き返した。だんだん早くなって、点Bまで進み、そこから速さを落として、だんだんゆっくりと歩き点Cに至った。そこから再び方向を変えて、だんだん早く進んで点Dまで歩いた。このような物語をグラフで書いて説明することとした。

位置を示すグラフ（数学モデルから作成）

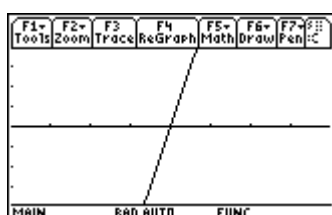


速度を示すグラフ（速度に符合がある）



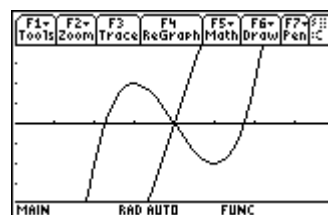
位置を示すグラフには座標軸は必要はないが、速度は方向が変わる点Aから点Bまでは反対に歩いていることになり、速度の符号がマイナスになっている。グラフではx軸より下に現れる。この速度のグラフの極小点には、位置のグラフの変極点が当たる。

速度を示すグラフを、位置のグラフに見立て、速度を求めることは微分の計算をすればよい。この2回微分をすることは、位置のグラフに対して、加速度を求めることである。加速度を示すグラフ(加速度に符合がある)



問題はこの加速度を示すグラフと、歩いてい

る人の位置を示すグラフの対応に問題があった。



A地点から、Bへ進むのは、だんだん早くなる。しかし、今考えている部分の加速度はマイナスであり、だんだん早くなることと加速度マイナスでは、矛盾があると考えられないであろうか。ただ、計算を中心として行っている数学教育では問題がどこに怒っているのかも考える可能性はない。数学モデルがきちんと設定してあったことにより、計算が正しい思いながらも、今何を考えているのかを知っていた結果、不自然さ・説明の不可能な感じを発見できたのかもしれない。

3. 統計的手法の重要性

統計の問題にはデータが多いことが必要である。統計処理の計算が今までは授業では扱えなかった。そして、データの個数が10個ぐらいの統計を扱ってきた。この統計の問題点は計算が多すぎて、処理できないことであつた。今後の社会の中での数学活用は統計手法が重要な役割を果たすであろう。計算は機械が行うときに、数学教育は変化する。しかし、現在の日本のカリキュラムでは、この変化には対応できない。計算を筆算として行うことに数学教育の意義を認めるのであれば、計算のない数学教育などはありえないであろう。統計処理を機会に委ねて、如何にして計算のない数学教育に近づくことができるかが問われるであろう。データが語ることを数学的に処理をすることの重要性に気がつくことを望みたい。ここでは統計的手法の回帰曲線についての問題を扱う。

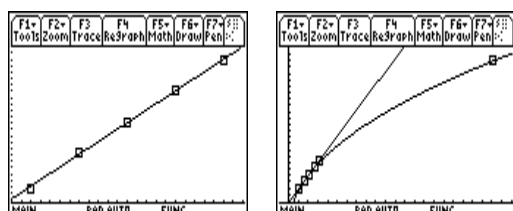
実験(データ収集)

振り子の実験を行って、振り子の長さや周期の関係を調べたい。振り子の長さが短いときには、回帰直線で十分であるが、長くなると、直線回帰では不十分であることがわかる。

収集したデータ

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plot Setup	Cell Header	Calc	Util	Stat	
DATA						
	c1	c2	c3			
1	20	.925				
2	30	1.111				
3	40	1.273				
4	50	1.439				
c1=						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

このデータのグラフ化をすることによって、どのような状況下を読み取ることができる。データを収集しただけでは、データを見てもそこから語ってはくれない。しかし、グラフにすることによって、どのような解析を行ったらいかが、またその結果をも見ることができる。今までの計算が中心の数学教育では、具体的にどのようなことが起こっているかをもちむことが不可能であった。



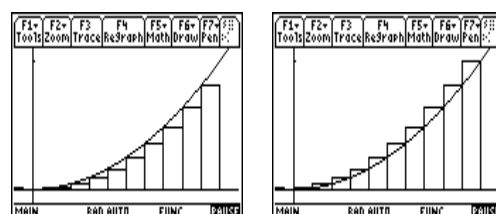
振り子が短い直線回帰と長くなったとき回帰曲線を作ることによって、データが語りかけてくれる。数学が計算に振り回されるのではなく、計算がない数学教育が数学の能力を高めるだけではなく、数学を使うことができるようになる。

4. 定積分を見る

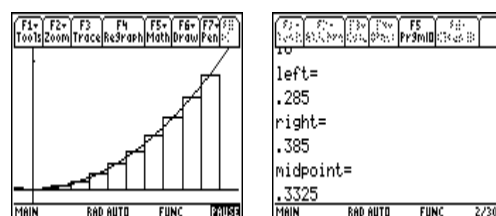
区分求積法で面積を求めることも、計算をするのでは面倒な話である。実際にはほとんど計算をしないで面積を求める。しかし、計算量が多いために、積分を計算で行った感じがして、満足感があるのかもしれない。

問題 $y = x^2$ で積分区間が $[0, 1]$ の時の面積を区分求積法を用いて求めたい。

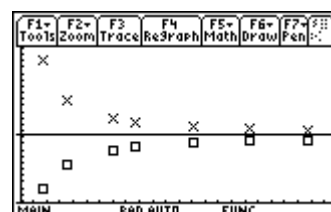
このような問題に対して、実際に計算できる区間の分割は多くはない、しかし、機械は非常に多くの分割の計算結果をグラフと共に示してくれる。



10 等分した時の区分求積法の一部



中間点での近似と 10 等分した近似分割によるデータをグラフ化したときに、面積はどこに近づくかがわかる。上下から近づくことは、面積の存在を示す。



実際にグラフを書いて、このような計算をすることは不可能に近い。機械が計算は行ってくれることは、数学を見ることができる。面積を求める積分についての方法論は、ギリシャ時代に確立していた。しかし、微分については 16 世紀の数学まで待たなくてはならなかった。具体的に見ることができない概念の発見は時間がかかった。計算に頼るだけではなく、具体的に見えることは数学を理解できる。

5.『読み・書き・ソロバン』は終わった

テクノロジーの発展は計算から人を解放した。時代の変化は人類の文化形成にも大きな影響を及ぼす結果となった。日本では世間一般の数学に対する考え方は、『数学＝計算』であった。この考え方が定着したのは江戸時代のソロバン訓練が、明治時代の日本の近代化に大きく貢献したことによる。数学ということは計算をすることと思ひ込み、数学能力の評価は計算が速く正確にできることであった。この能力から世界の比較をした時に、計算術では大きな力を持っている。しかし、この能力が数学の能力に一致しないことは、気がつきたくはない。『読み・書き・ソロバン』の重要性は変わらなくても、数学に対する態度を変える必要が生じている。しかし、残念ながら、数学＝計算という考え方は依然として強い。計算をすることは訓練として大きな力があることは認めても、数学として計算術を学ぶ時代は終わってしまった。

社会の変化は計算を実際には行わなくなってしまった。買い物に行っても、お金の計算は機械が行って、人の入り込む余地はない。レジの前で店員と同時に一生懸命計算した時代は過ぎ去って、すべての計算は機械が行ってくれる。人はその結果を信用する以外には行うことがない。消費税 3%の実施は機械があつて初めて可能なことであつた。ローンの返済についても、相手任せであつて自分で計算をすることはない。だまされていても、おそらく計算を自分でやってみて、その誤りを正すことはできないであろう。社会の変化は学校教育にも影響を及ぼすであろう。現在の状況は社会が変化しているにもかかわらず、残念ながら学校教育には変化が見られない。

学校教育は内容削減 3 割でいろいろな問題を背負ってしまった。この結果、数学の学

力低下を恐れた学校教育では、計算ドリルの復活を行うことを高く評価し始めている。計算力は数学の力ではないことを示す必要がある。社会の中で『読み・書き・ソロバン』の強要は数学力を高めるのではなく、訓練する内容に乏しいことを物語っている。

6. 数学とは何か

『読み・書き・ソロバン』としての数学を否定して、数学の内容がわからなくなってしまう。計算＝数学には電卓が導入された社会での変化は著しい。しかし、人がこの変化についていかれない。数学＝計算の図式が壊れた次に、数学とは何かについての答えが必要な時代になった。

次の数学として、数学＝論理と考えるかもしれない。幾何が重視されてきたのは、論理としての証明が重要と考えていたためである。ユークリッド幾何(初等幾何)についての必要性を叫ぶことによって、論理の必要性を強調されてきた。しかし、その証明も穴埋め式の中途半端なことだけが残った。幾何を教育してみても、論理は身につかないと考えたのか、入学試験に役立たないのか解らないが、再び姿を消しつつある。

1. 数学とは、物事を考えること、見えない規則・調和を探し求めることである。出来上がった数学的知識の吸収だけが数学として考えられている。計算のない数学で扱う数学教育が目指すことは何かが、中途半端になっている。数学は楽しいと思うようになることは、自分で考えて、自分で作り出す数学が存在することに気がつくまで、変化は見られない。数学は楽しいという生徒が増えることを目標として、これからの数学教育に挑戦する必要がある。このときの数学教育には計算はいらない。