教師を驚かせた生徒の発見

清風高等学校　公庄庸三

2003 年 8 月 3 日

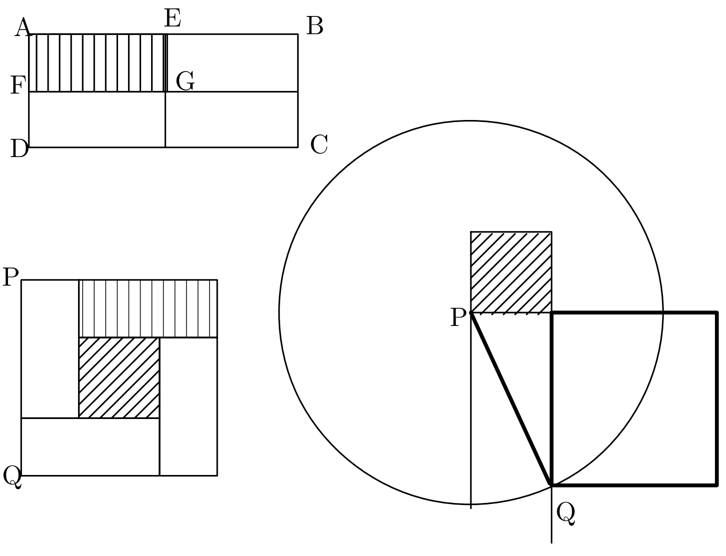
1　等積変形

任意の三角形を，それと等積な長方形に変形させる作図方法，任意の四角形を，それと等積な長方形に変形させる作図方法などを考えた後，任意の長方形をそれと等積な正方形に変形させる作図方法の話題になった．

いくつかの意見が出されたが，ことごとく反例が発見され，失敗に終わった．

そこで，一人だけ，他の生徒が声を挙げて驚いた方法が発見された．

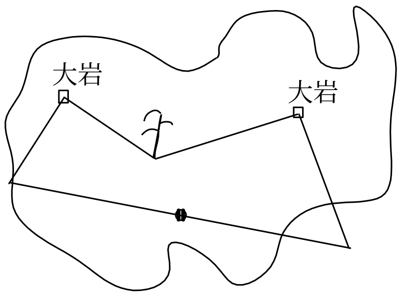
- ABCD が最初の長方形
- 各辺の中点で長方形を 4 等分する
- この長方形を図のように並べ替える
- 真ん中の正方形の頂点を中心として半径 PQ の円をかく
- 図の太い正方形が求める正方形である。



この方法の伏線として，これより前に,「三平方の定理を 1 回だけ使って作図できる $\sqrt{n}$（ただし n は自然数）を考えているとき，$\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ などは比較的早く発見されたが，$\sqrt{7}$ や $\sqrt{3}$ が発見されたのは，遅かった．このことが彼の頭に強烈に残っていたようである．

2　宝島

海賊が莫大な財宝を一時的に隠すためにある無人島にやってきた。この島には 2 つの大きな岩 A,B と大きな椰子の木 C が 1 本あり，他には目をさえぎるような障害物はなく，見渡す限りの草原であった。



海賊は，岩 A を中心として椰子の木 C を時計まわりに 90 °回転した地点を D，岩 B を中心として椰子の木 C を反時計まわりに 90 °回転した地点を E とし，2 点 D,E の中点に財宝を埋めた。

数年の後，埋めた宝を掘り返しにやってきたが, このとき島はジャングルと化し，無数の椰子の木と背の高い樹木で覆われていた。しかし幸いなことに 2 つの岩 A,B は昔のままの状態であった。

このとき，財宝の埋められている場所はどこか?理由をつけて答えよ。

この問題を出したとき，多くの生徒はまず紙に図を書いていたが，途中からは technology で探し始めた．宝の在処を数学で解析することは中学生には不可能（座標や，複素数を使用すると解ける）と思っていたが，見事に初等幾何で証明されてしまった．

中学生の解答の概略

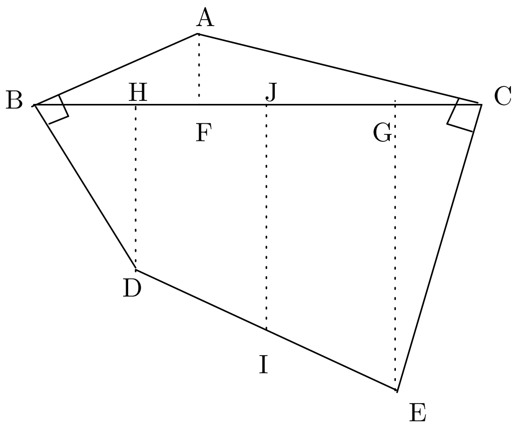
線分 DE の中点を I, 点 D,A,I,E から直線 BC に下ろした垂線を，それぞれ H,F,J,G とする．

仮定は，$DH \perp BC$，$EG \perp BC$，$IJ \perp BC$，$AF \perp BC$，$AC = CE$，$AB = BD$，$DI = IE$，$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{ACE} = 90^\circ$ である．

A:適当な椰子の木　　B,C:大岩

B を中心に A を右 90 度回転した点 D

C を中心に A を左 90 度回転した点 E



証明

1. $\triangle \mathrm{ACF} \equiv \triangle \mathrm{CEG}$　　2. $\triangle \mathrm{ABF} \equiv \triangle \mathrm{BDH}$　　3. $AF = CG = BH$

4. $HJ = JG$　　5. $BJ = JC$　　6. $IJ = \dfrac{BC}{2}$

以上により A には関係なく，BC の中点を J とするとき，J を中心に C を右に 90 度回転した点に宝が埋めてあることがわかる．

3　二項定理

この部分の授業の中で，中学 2 年生の思考の柔軟性というか，発想の豊かさというかとにかくすばらしい出来事が起こったのでそれを紹介する．

まず，授業の流れを箇条書きにすると

1. 「展開」とは何か？
2. 展開をするときのもっとも重要な考えは「分配法則」であることの確認．
3. 分配法則を小学生がわかるように説明するにはどうするか？という発問．
4. 教科書で $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を習ったことを確認する．
5. $(a+b)^3$ の展開を手計算で行わせる．結果は $a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$ と $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ に意見が分かれた．これらは同じであることの確認と，どちらの結果が「美しいか」を議論する．
6. $(a+b)^4$ と $(a+b)^5$ の展開を手計算でさせる．
7. technology で展開するときの方法を説明．つまり $expand((a+b)^n|n=?)$ を説明する．
8. technology を使って $n = 6, 7, 8, 9, \cdots$ を計算し，暗算で $(a+b)^{100}$ の展開ができないか考えよう．という問題を出す．

この後で次のような事件が起こった．

係数が左右対称になっており，その係数は上の 2 つの数を足した数である（パスカルの三角形）ことと，a,b の関係つまり a^pb^{n-p} であることは，ほとんどの生徒が見つけた．

そこで，「じゃあ，黒板に答えを書くから，みんなで大きな声で言ってみよう」といい，$a^{100} + 100a^{99}b+$ まで来たが，あとは沈黙．しばらくして「先生最後の方はわかる」という発言があり，最後は $+100ab^{99} + b^{100}$ とみんなで大きな声で言った．

では 3 番目の係数を考えよう．ということにしてしばらくほっておいた．

ある隣同士に並んでいる 2 人の生徒が，びっくりするようなことを言った．

「先生，ちょっとおもしろいよ.」といって次のようなメモを説明してくれた．

$$1 \quad \frac{2}{1} \quad 2 \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{3}{1} \quad 3 \quad \frac{2}{2} \quad 3 \quad \frac{1}{3} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{4}{1} \quad 4 \quad \frac{3}{2} \quad 6 \quad \frac{2}{3} \quad 4 \quad \frac{1}{4} \quad 1$$

$$1 \quad \frac{5}{1} \quad 5 \quad \frac{4}{2} \quad 10 \quad \frac{3}{3} \quad 10 \quad \frac{2}{4} \quad 5 \quad \frac{1}{5} \quad 1$$

○の数字（分数）は赤色で書いてあった．

そのメモの内容を彼らから聞いて，それを黒板に書いて全員に説明した．

○の中の分数は，例えば $n = 4$ の場合ならば，最初の○は $\dfrac{4}{1}$ であり，その後は，分母の数値を 1 増やして，分子の数値を 1 減らした分数を次々に数字の間に書いていくのです．書き終わると，最初

の数と（常に１）と最初の〇分数をかけた数が２番目の係数であり，その２番目の係数に２つ目の〇分数をかけた数が３番目の係数で，その３番目の係数に３つ目の〇分数をかけた数が４番目の係数になっているというわけです．

説明を聞き終わった生徒は，他の n についても，ただしいかを検証しだした．いずれも正しいようである．

「これはすばらしい関係を見つけたな．私もこんな関係は知らなかった」とやや興奮気味に述べて,「それではこの関係でさっきの $(a+b)^{100}$ の展開の続きを調べよう.」と発問した.

各自手計算で最初の部分の係数を調べ，それが technology での結果と同じであるのにまたまた驚いた.

$$1 \quad \frac{100}{1} \quad 100 \quad \frac{99}{2}$$

最初の１はＯＫ．次の係数は 100 だから，１と 100 の間に赤い分数 $\dfrac{100}{1}$ を書く．次の赤い分数は $\dfrac{99}{2}$ だから，3 番目の係数は，$100\times\dfrac{99}{2}=50\times 99=4950$, 次の赤い分数は $\dfrac{98}{3}$ だから，4 番目の係数は $4950\times\dfrac{98}{3}=161700$ である．

そこで,「ここまできたから，公式を作ろう」公式だからどうする？

「先生文字を使えばいい」という発言があり,「では $(a+b)^n$ の展開の公式を作れ」と指示してしばらくほっておいた.

できあがった係数を発表させると次のようであった.

$$1,\quad n,\quad \frac{n(n-1)}{2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{6},\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},\quad \cdots$$

「よし，これでいいか？」と聞くと,「分子は覚えられるが，分母は覚えられない」という意見が出されたので,「よし，分母を覚えられるような何か考えはないか？」と聞いた.

しばらくして,「$1,\quad 1\times 2,\quad 1\times 2\times 3,\quad 1\times 2\times 3\times 4$ だ」という意見がだされた.

これなら覚えられるということになって,「太田・開徳の定理」が完成した.

$(a+b)^n$ の展開は

$$a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^{n-4}b^4+\cdots$$

すばらしい発見で，二項定理が完成したのでこれで授業を終わろうかと思ったが，ついでだから，以下のようにして終わった.

「ここまで来たら１つ便利な記号を教えてあげよう.」

$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9$ と書くのは手が疲れるだろ？そこで数学者はおもしろい記号を作ったのだ.

$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9$ を $9!$ と書くのだ．黒板に階乗の記号を大きく書くと,「先生それは英語の記号だ」と発言あり.「そうだ，どんなときに使う記号だ？」「感嘆文」「びっくり文」という発言あり.

数学者はわけのわからん難しい記号をたくさん作るが，この記号は「気持ちがよくでているぞ．試しに 20! を計算してみよ.」

生徒は一斉に technology で計算をし始め，一番早い生徒が「できた．2432902008176640000 です.」他の生徒もしばらくして完成.

「君ら，もし 100! 計算しろと言われたらほんとに計算するか？」

「いやや，数字を押すだけで疲れる」

「よし，最後にもう一つ．このびっくり記号はこの機械にあるのだ．100 を入力して，そのあとで $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{W}}$を押せ.」

「わあぁ．びっくりがでた.」「あとは enter ですか？」「そうだ」「わあぁ，すごい数字だ」

「よし，この記号はなぜびっくりにしたのかわかったな？」「はい」

「よし，きょうは終わり」

4 ピタゴラス数

$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数をいろいろ探そう.

手で計算するもの，technology で調べるものなどいろいろあり.

見つかった数値をその都度黒板に板書していく.

$3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$, $8^2+6^2=10^2$,$7^2+24^2=25^2$, $12^2+16^2=20^2$, $40^2+9^2=41^2$, $45^2+28^2=53^2$, $20^2+21^2=29^2$, $\cdots$

しばらくして，前の方で 3 人が一緒になって探していたグループが「先生，どんな大きな数でもいいから１つ奇数を言ってください．僕らはその数を使ってすぐにピタゴラス数を見つけることができると思います」と言った.

そこで適当に大きな奇数を１つ言ってやった．例えば 1234567 と言ったとしよう.

彼らは technology で何かを計算し，ほんの数秒の後に，$(762077838744)^2+(1234567)^2=(762077838745)^2$ です．と答えた．その数値を彼らの言うとおりに黒板に書くと，他の生徒が検算し始めた.

みんな「本当だ」と驚いたのできっと正しいのだろう.

彼らにどうして見つけたのかを聞いた.

省略

そこで，それを数学で証明してみよ．という課題に変えた.

見事に証明も完成した.

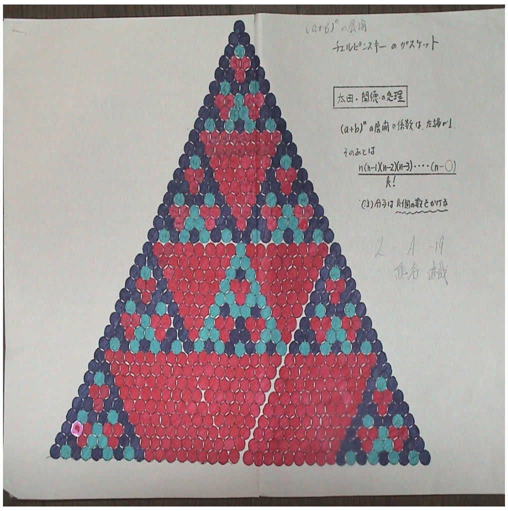
$(2n^2-2n)^2+(2n-1)^2=(2n^2-2n+1)^2$

平成 11 年度北海道大学後期理・工学部入試問題 [3]

3 辺の長さがいずれも整数値であるような直角三角形を考える.

1. 直角を挟む 2 辺の長さのうち，少なくとも一方は偶数であることを証明せよ.
2. 斜辺の長さと 2 番目に長い辺の長さの差が 1 であるような例を 3,4,5 以外に３つ挙げよ.

5　チェルピンスキーのガスケット



熊谷直哉　彼は，$(a+b)^n$ の展開において，係数を 3 で割った際の余りで 3 色に色分けした．1 余るのは青，2 余るのは水色，割り切れるのは赤に設定した．

次の 4 つのことを発見した．

1. すべて規則的に並んでいる．
2. 赤色の三角形がたくさんある．とくに 4 個は（1 つは途中まで）とても大きな三角形になった．
3. 赤の三角形以外に，2 辺が青だけでできている三角形が 8 個あるはずなのですが，真ん中のだけが違う．
4. その 1 つだけ違う三角形は残りの三角形の「青」と「水色」を入れ替えただけです．

疑問点が 2 つある．

1. なぜ一番したの赤い三角形だけが大きいのだろう？
2. 上の発見の [3] で，なぜ 1 つだけ配置が違うのか？

6　ヒイラギの葉っぱ

時間があれば当日発表

7　たまごの方程式

時間があれば当日発表