# 見てわかるテイラーの定理

**関西学院大学　物理学科数学専攻　山根英司**

yamane@ksc.kwansei.ac.jp

関学物理学科は物理学専攻 (定員 60) と数学専攻 (定員 26) に分かれていますが, 授業は一緒にやっています. 現在は学生の有志を集めて電卓講習会を開き, テイラーの定理やフーリエ級数の話をしています (次のページでテイラーの定理の教材を紹介します). いずれは 1 年生全員に数式処理電卓を貸し出して微積分や線形代数の教育に生かそうと思っています.

グラフ機能は微積分・解析を視覚的に理解するのに大変役立ちます. テイラーの定理やフーリエ級数はその典型的な例です. 2 変数関数の極値の話も図を見ればすぐ納得できるでしょう. 平面上の力学系の積分曲線も図示出来ます. 私が学生の頃などは本に載っている図を眺めるだけでしたが, 今の学生は自分で係数や区間を変えて様々な図を描いて楽しむことが出来ます.

数式処理機能は計算練習の補助に役立ちます. ①教科書の解は途中の計算が書いていないことが多いのでそれを補う②自分でやった計算の各ステップが正しいかどうか電卓に聞いてみる③電卓で計算して予想を立ててから手計算で証明する, ということを考えています.

計算練習の結果, きちんと理解して手で計算できるようになったとしましょう. そうなったら, 出来るに決まっている計算は電卓でやってもいいでしょう. 例えば線形代数の掃き出し法の計算をいつまでも (Jordan 標準形を習うときになっても) 手でやる必要はないと思います. 部分分数分解には全くうんざりさせられますが, これも原理が分かった後なら電卓でやればいいでしょう.

私自身は数式処理電卓を授業の準備に使うのはもちろん, 研究に使っています. 積分の計算をすることが多いのですが, 簡単な場合をまず手軽な電卓で実験し, うまく行きそうだと思ったら Maple でもっと複雑な場合を実験しています. そうやって予想を立ててから, 手計算で一般の場合を証明するわけです. 数式処理ソフトには簡単化のくせがあって, TI の電卓のほうが Maple より分かりやすい答えを出すことがあります.

---

次のページが今日の本題です. TI-92 Plus と Voyage 200 に準拠して書いてあります. TI-89 でも同じことが出来ますが, キーの割り当てが少し違います.

$\boxed{\text{F3}}$ 1: $d($ は微分を表す．QWERTY キーボードの d はフォントも機能も違う．$d($ SIN(X), X) で微分．$d($ SIN(X), X, 2) で 2 階導関数．

$\boxed{\text{2nd}}$ [ | ] は代入．$d$(X∧3, X) $\boxed{\text{2nd}}$ [ | ] X=A は $3 \cdot a^2$

**グラフの描き方** $\boxed{\text{APPS}}$ 2:Y= Editor で関数の式を入力．$\boxed{\text{APPS}}$ 3:Window Editor で xmin, xmax, ymin, ymax を設定．$\boxed{\text{APPS}}$ 4:Graph でグラフが描ける．$\boxed{\text{F2}}$ でズーム．$\boxed{\text{APPS}}$ A:Home で元の画面に戻る．

**小技 1** Y= Editor 画面で $\boxed{\text{F4}}$ を使ってチェックをつけたり外したり出来る．チェックつきの関数のグラフだけが表示される．

**小技 2** Home 画面で微分・積分などの計算をした結果を Y= Editor に入力したいとき, タイプし直さなくても良い．$\boxed{\text{2nd}}$ [ANS] $\boxed{\text{STO>}}$ Y1(X) とすれば直前の計算結果が y1(x) に代入される．

**小技 3** $\boxed{\text{2nd}}$ [ANS] は高階導関数の計算にも便利．例えば $d($ 1/(1 $\boxed{-}$ X), X) の後で $d($ $\boxed{\text{2nd}}$ [ANS], X) を繰り返してみよう．

**新しいコマンドを作る (ユーザ定義関数)**

接線のコマンド SS (関数 f を $x = a$ の近くで 1 次関数で近似) を作ろう．

( $d$(F, X) | X=A) ×(X $\boxed{-}$ A) +(F | X=A) $\boxed{\text{STO>}}$ SS(F, A)

SS(SIN(X), $\pi/6$) のように使う．

関数 f を $x = a$ の近くで 2 次関数で近似するコマンド HB を作ろう．

SS(F, A)+($d$(F, X, 2) | X=A) ×(X $\boxed{-}$ A) ∧2/2 $\boxed{\text{STO>}}$ HB(F, A)

**TABLE(数表) の使い方** $\boxed{\text{APPS}}$ 5:Table で起動する．$\boxed{\text{F2}}$ で $x = x_0 + n\Delta x, n \in \mathbb{Z}$, と表すときの $x_0$(tblStart) と $\Delta x$($\Delta$tbl) を設定する．

3 次，4 次, ... とやればどんどん近似がよくなる．実は $\boxed{\text{F3}}$ 9:taylor が $n$ 次式による近似の機能を持っている．(書式を忘れたら $\boxed{\text{2nd}}$ [CATALOG])

TAYLOR(SIN(X), X, 3, 0)

$e, \sqrt{e}, \sqrt{1.1}$ の近似値 (注: QWERTY キーボードの e と $\boxed{\text{2nd}}$ [ $e$∧( ] の $e$ はフォントも機能も違う )

TAYLOR( $\boxed{\text{2nd}}$ [ $e$∧( ] x, x, 5, 0) | X=1.0 など．(X=1 だと有理数の計算をするが, X=1.0 だと浮動小数.)

**テイラーの定理**(大雑把に述べる)

$x \approx a$ のとき $f(x) \approx \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j.$

この右辺が TAYLOR(F(X), X, N, A) である．