グラフ電卓初心者コース　－グラフによる視覚化－

中澤房紀（Naoco Inc./東日本国際大学）

グラフ電卓を道具としてどのように使うかという Workshop の前に，学習指導要領により目指すべき方向を確認しておきたい。

1. 学習指導要領　改訂の背景

「知識基盤社会化」「グローバル化」「国際競争」「国際協力」
OECD（経済協力開発機構）の PISA 調査など各種の調査からは，我が国の児童生徒については，例えば，

① 思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題，知識・技能を活用する問題に課題
② 読解力で成績分布の分散が拡大しており，その背景には家庭での学習時間などの学習意欲，学習習慣・生活習慣に課題
③ 自分への自信の欠如や自らの将来への不安，体力の低下といった課題

が見られるところである。

2. 中学校数学科の目標

数学的活動を通して，
数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，
数学的な表現や処理の仕方を習得し，
事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，
数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，
それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

3. 数学的活動

数学的活動には，試行錯誤をしたり，資料を収集整理したり，観察したり，操作したり，実験したりすることなどの活動も含まれ得るが，
教師の説明を一方的に聞くだけの学習や，単なる計算練習を行うだけの学習などは含まれない。

数学的活動をしようと思ったら，　今まで通り，先生は「チョークと黒板」生徒は「紙と鉛筆」でできるのか？

4. 重視する数学的活動

数学的活動のうち，特に中学校数学科において重視しているのは，
① 既習の数学を基にして数や図形の性質などを見いだし発展させる活動
② 日常生活や社会で数学を利用する活動
③ 数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動　である。

5. 現代化とは

Technology の急激な発展は、教育へも大きな影響を与えようとしている。これらは、道具の一つであるが、道具は時として世界を変革する。従来の数学はもちろん貴重な文化遺産であるが、このような強力な道具がなかった時代に，もっぱら人力によって構成されてきた。
新しい時代には新しい道具を活用して学ぶのが、真の「現代化」であるまいか。

一松 信　1995 「グラフ電卓を数学に」

6. 数学でテクノロジーを使う意味

- 代数的に解いていることを視覚的に確認する。
- 視覚的に解いたことを代数的に確かめる。
- 探求的な活動を通して規則性を発見する。
- 身近な事象・現象のデータを活用する。
- 紙と鉛筆だけでは扱えない問題を扱う。

以降の原稿は，当日配布する資料の一部を抜粋しまとめたものです。

- **グラフ化の手順**

手順 1：MODE でグラフのタイプや表示方法を選択。

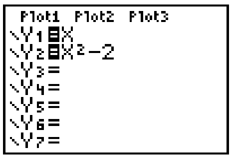
手順 2：Y= で式を入力。

手順 3：WINDOW で x , y の表示範囲など WINDOW 変数を設定し，GRAPH で描画。

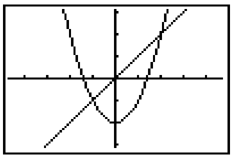
ZOOM により既定値に WINDOW 変数を設定し描画。

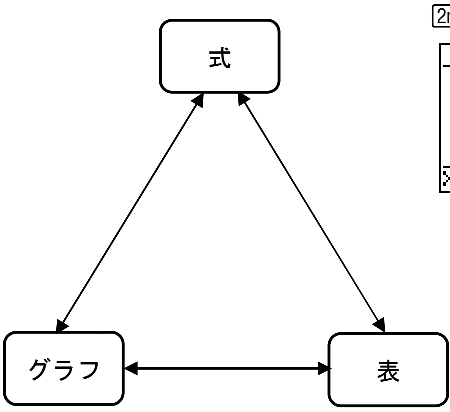
- **探索**
  - ・Y= で式を変える。
  - ・TRACE 2nd によって，グラフ上で x , y の関係を表示。
  - ・ZOOM，WINDOW ＋GRAPH で画面に表示する範囲を変更。
  - ・2nd [TABLE]で数表を表示。2nd [TBLSET]で変数値の刻みを変更。
  - ・2nd [CALC]でグラフを表示した状態で，各種の値を計算。
  - ・2nd [DRAW]でグラフ上に平行線や接線を引いたり，塗りつぶしをしたりする。

Y=

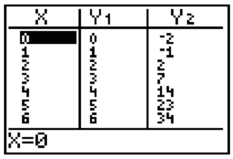


ZOOM 「4:ZDcimal」





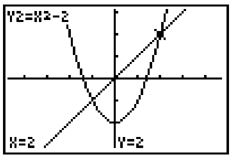
2nd [TABLE]



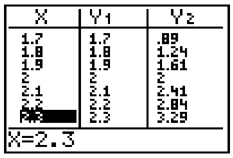
X	Y1	Y2
0	0	-2
1	1	-1
2	2	2
3	3	7
4	4	14
5	5	23
6	6	34

X=0

TRACE

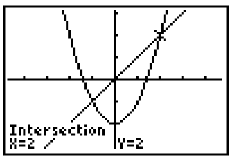


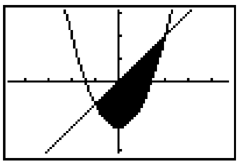
2nd [TBLSET] +2nd [TABLE]



X	Y1	Y2
1.7	1.7	.89
1.8	1.8	1.24
1.9	1.9	1.61
2	2	2
2.1	2.1	2.41
2.2	2.2	2.84
2.3	2.3	3.29

X=2.3





2nd [CALC]　　2nd [DRAW]「7:Shade( ) 」 その他 2nd [FORMAT]

☰ 連立方程式

弟が 1 Km 離れた駅に向かって家を出ました。それから 10 分たって，兄が自転車で同じ道を追いかけました。弟の歩く速さは毎分 60m，兄の自転車の速さは毎分 170m であるとすると，兄は出発してから何分後に弟に追いつくでしょうか。

❒ 紙と鉛筆で求めてみよう

兄が出発してからの時間を x 分とすると，

$$170x = 60(10 + x)$$
$$170x = 600 + 60x$$
$$110x = 600$$
$$x = 5\frac{5}{11}$$

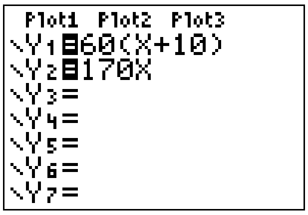
兄が出発してから $5\frac{5}{11}$ 分後の，兄と弟の家からの道のりは，

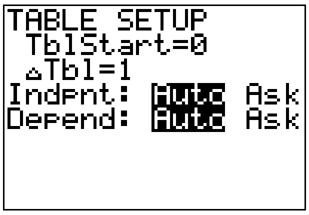
兄 … $170 \times 5\frac{5}{11} = 927\frac{3}{11}$ （m）

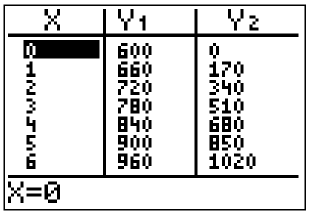
弟 … $60\left(10 + 5\frac{5}{11}\right) = 927\frac{3}{11}$ （m）

$927\frac{3}{11}$ m の地点で追いつき，問題にあっている。

❒ 数表から 2 人の関係を調べてみよう



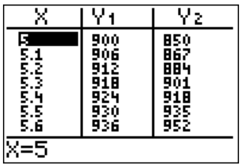


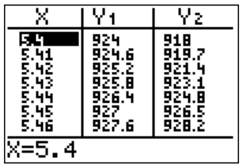


Activity　Y_1 が弟，Y_2 がお兄さんです。この数表から読み取れることを書きなさい。

［解答例］　・5分から6分の間でお兄さんは弟に追いついた。
・6 分かからずにお兄さんは駅に着いている。
・お兄さんが先に駅に着いた。　　　など

もう少し詳しく見てみよう。5 秒から 0.1 秒刻み　　　5.4 秒から 0.01 秒刻み





上記のことを繰り返すと，より正確な値を知ることができます。
このように範囲を狭めていくという「区間縮小法」の考え方は，
数学における大切な考え方です。また，数学のみならず応用できる考え方です。

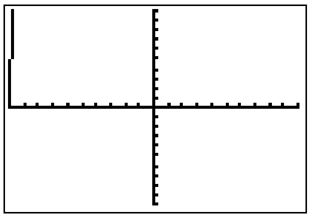
❒ グラフでみてみましょう。

s　を押すとグラフが描かれます。

グラフは描かれましたか？

思ったようなグラフが描かれなかったならば，何故でしょう。

（注）WINDOW の設定により、絵描かれるグラフはまちまちです。

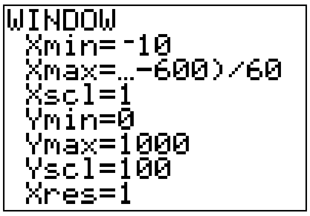


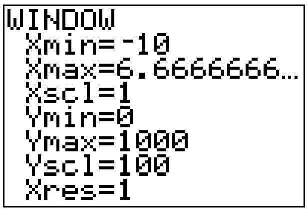
❒ p を押して，WINDOW 変数を設定します。

問題の題意を読み取り，グラフを表示する画面の X，Y の範囲を決まます。
WINDOW 変数の設定は，問題の内容を理解していく上で大切な過程です。
生徒が同じグラフを描くことが目的ではありません。

ここが重要！

- そもそも x って何だっけ？
- 弟が家を出るところからグラフを描くにはどうすればいいのだろう。
  Xmin は 0 でいい？　　もう一度 x は何だろう。
- 弟も兄も駅に着くまでをグラフに描くにはどうすればいいのだろう。
  兄が駅に着くまでの時間は，1000÷170
  弟が駅に着くまでの時間は，1000÷60－10
  　　　　　　　　　　　　　(1000－60×10)÷60
  これらの計算は WINDOW の画面で行うことができます。
- そもそも y って何だっけ？

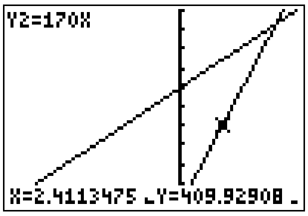


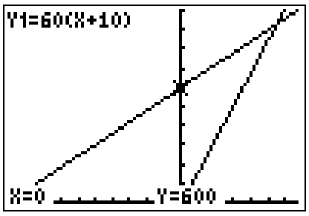


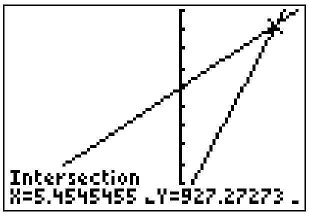
この画面では，計算をすることもできます。

> さまざまな考え方が出てきます。この過程こそ「Do Math」です。
> この過程を省いて入力した式を機械が自動的に描画してしまう，先生が WINDOW をこう設定しなさい，と言ってしまう。
> それは，生徒たちから“数学すること”を奪うことになります。

❒ グラフを見ながら







❒ グラフを見ながらディスカッションです。

- 弟のグラフはどっち？
- 兄のグラフはどっち？
- トレースしてみましょう。$x=0$ のとき，$y=600$ は何を意味していますか？
- 兄と弟はどちらが先に駅に着きましたか。
- グラフの交点は何を意味していますか。

> 文章題は文章題。グラフはグラフ。とまったく別物になっていませんか。
> 方程式を解いていることは，グラフ的には交点を求めていることですね。

≡ $f(x)=x^2-6x+7 \quad (a \leq x \leq a+1)$ の最大値を求めない。

❒ 紙と鉛筆で求めよう

$$f(x)=x^2-6x+7$$
$$=(x-3)^2-2$$

$a<\dfrac{5}{2}$のとき，　$f(a)=a^2-6a+7$

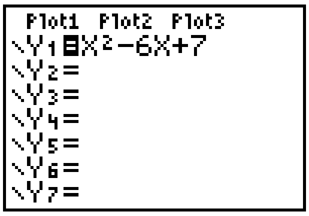
$\dfrac{5}{2}\leq a$のとき，$f(a+1)=(a+1)^2-6(a+1)+7$

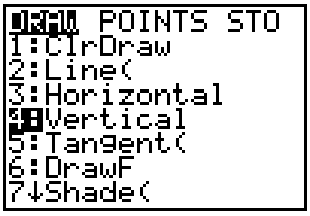
$$=a^2-4a-2$$

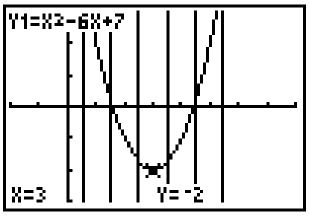
なぜ，平方完成して a で場合分けして，$f(a)$のときと，$f(a+1)$のときがあるの。

❒ 視覚的に確認する

$a=0$ のとき，x の範囲は $0\leqq x\leqq 1$
$a=1$ のとき，x の範囲は $1\leqq x\leqq 2$
$a=2$ のとき，x の範囲は $2\leqq x\leqq 3$
この範囲をグラフ上に描いてみましょう

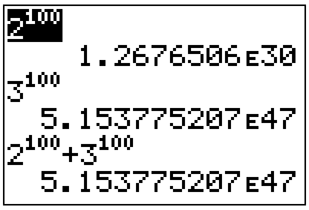


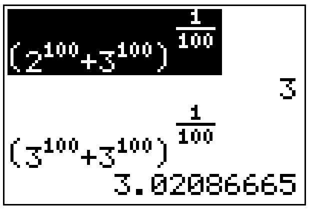


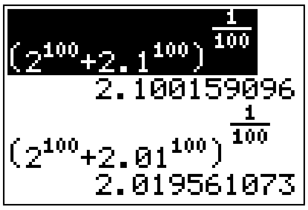


> 具体的に範囲を示してみると，何をすべきかが見えてきませんか？
> 平方完成の必要性が，a の場合分けの必要性が。

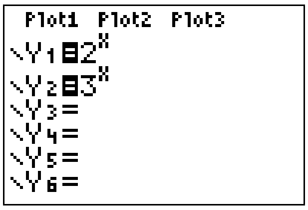
≡ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ の場合わけについて納得する

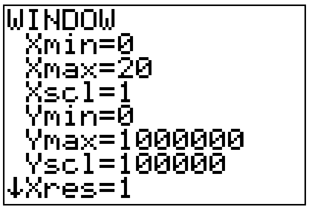


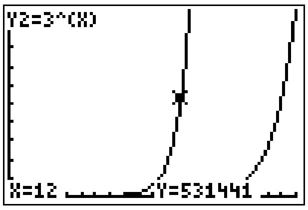




☞具体的な数値を入れて計算してみることで，a と b の大小関係による場合わけの意味が腑に落ちませんか。
☞指数関数のグラフの特徴を視覚的につかんでおくだけでも違います。

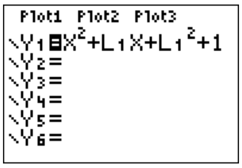


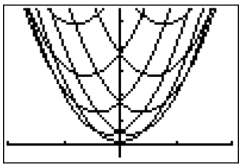
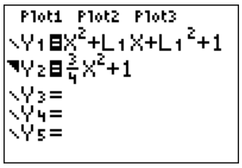


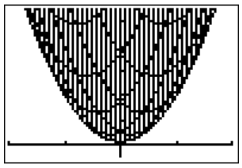


●一気にたちあがる

☰ a が任意の実数をとって変わるとき，関数 $y=x^2+ax+a^2+1$ のグラフが存在する範囲を求めよ。





a に具体的な値を入れてグラフを描いてみます。

{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10} → L_1 ⬅ a の代わりにリスト L_1を使用します。求める領域は，放物線 $y = x^2$ が軸を y 軸に平行のまま，頂点が $y=3x^2+1$ 上を動いてできたものです。

a について整理した2次式の実数条件から

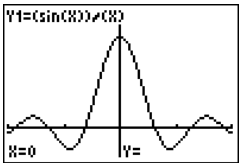
点 (x, y) の存在範囲を求めると，

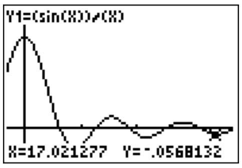
判別式≧0 より，

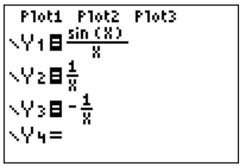
$y \geqq \frac{3}{4}x^2+1$ が求める範囲です。

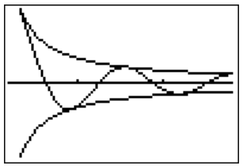
ここでは a は2次でしたが，3次や4次になった場合はどうでしょう。

☰ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ を視覚的に見る。









トレースします。$x=0$ のとき，y の値がないことに留意します。

トレースを続けるとプラス・マイナスを繰り返しながら x 軸に近づいていく様子が見えます。

$y=\frac{1}{x}$ と $y=-\frac{1}{x}$ のグラフをいっしょに描くと，これが普段代数的に解いているときの「はさみうちの原理」の視覚化です。

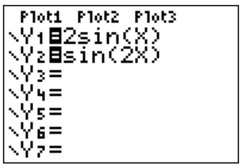
☰ 関数 $y=2\sin x-\sin 2x$ $(0<x<2\pi)$ の極値を調べる。

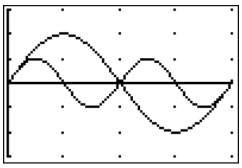
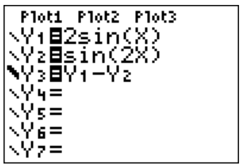
$y'=0$ となる x の値は $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ である (ただし，$\boxed{ア} < \boxed{イ}$)。

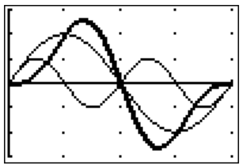
$x=\boxed{ア}$ のとき，この関数の値は $\boxed{ウ}$，$x=\boxed{イ}$ のとき，この関数の値は $\boxed{エ}$。

選択肢　1：$\frac{\pi}{6}$　2：$\frac{\pi}{3}$　3：$\frac{\pi}{2}$　4：$\frac{2\pi}{3}$　5：$\frac{4\pi}{3}$　6：$\frac{5\pi}{6}$　7：π

8：極大値をとる　9：極小値をとる　10：極値をとらない





代数的に解く前に視覚的に考えてみましょう。問題の関数のグラフを描いてみましょう。そこから，おのずと答えも見えてきます。仮に計算間違いをしても気づきます。

２つの三角関数を引いてできる関数の周期の規則性。掛けてできる関数の周期の規則性。周期とグラフの対称性についても視覚的に確認し理解しましょう。