数学を視覚化する

青森県立三本木高等学校　　相 馬　　誠

E-mail：soma-makoto@m04.asn.ed.jp

§１　Introduction

数学の授業にテクノロジーを活用する目的のひとつに，「視覚化」することが挙げられる．発表者自身，様々な生徒たちとグラフ電卓を活用した授業実践を行いながら，「思考実験」を授業に取り入れることの大切さに気付かされる場面が数多くある．今回は，発表者自身が行ってきたいくつかの授業実践を挙げながら，「視覚化することの有用性」について考えてみたい．

§２　授業実践

この章では，前任校である青森県立五戸高等学校，そして現在の勤務校である青森県立三本木高等学校・附属中学校で行った授業実践について紹介する．

A．3 次関数の係数とグラフの変化に関する授業

教科書における「3 次関数のグラフ」の扱われ方は，増減表を作成しそれをもとにグラフを作成するという内容にとどまっている．しかし，多くの皆さんが疑問に思うように発表者は考えているのであるが，どの教科書を見ても $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の係数とグラフの関係についてはまったく述べられていない．（この内容に関して興味をもたれた方は，[１]をご覧になることをすすめる．）

この授業で対象となった生徒は，平成１７年度の青森県立五戸高等学校高校３年生の情報系（商業系）クラスである．当時，ＳＰＰを実施していた関係でグラフ電卓が手元にあったことがきっかけで，3 次関数に関する「教室での思考実験」に取り組んだ．以下の問題は，生徒に印刷をして配布した内容である．

【問題】　グラフ電卓の画面に $y = x^3 + x^2 + x + 1$ のグラフを書き，

（1）$y = x^3 + x^2 + \square x + 1$ としたとき，□の中の数字を変えていくとグラフはどのようになったかを各自でまとめなさい．

（2）$y = x^3 + \square x^2 + x + 1$ としたとき，（1）と同様に□の中の数字を変えていくとグラフはどのようになったかを各自でまとめなさい．

（3）$y = \square x^3 + x^2 + x + 1$ としたとき，（1）と同様に□の中の数字を変えていくとグラフはどのようになったかを各自でまとめなさい．

（1）の生徒たちの答え（主なもの）

① □の中の値が大きくなると，直線に近づき，□の中の値が小さくなるとグラフは上下に激しくふれる．

② □の中の値が大きくなると，グラフは左に動く．また，□の中の数字が小さくなると，グラフは右に動く．

（2）の生徒たちの答え（主なもの）

① □の中の値が大きくなるとグラフは上にふれ，□の中の値が小さくなるとグラフは下にふれる．

② □の中の数字が大きくなるとグラフは半分から左は上下に激しくふれ，右はほぼ直線．□の中の数字が小さくなるとグラフは半分から右は上下に激しくふれ，左はほぼ直線.

（3）の生徒たちの答えについては，文章にした生徒はいなかったが，グラフの様子を絵に描いている生徒が非常に多かった.

B．マクローリン展開の視覚化

この授業で対象となった生徒は，平成２０年度の青森県立三本木高等学校 3 年生普通科理系クラスで行った内容である．テーラー展開やマクローリン展開については，高校の教科書では記載されているものもあるが，発展的な内容ということでなかなか扱われないようである．当時使用していた教科書（実教出版　数学Ⅲ）において発展的な内容として扱われていたページがあった点に注目し，マクローリン展開における x が 0 の近くでの様子を，近似の次数を大きくしながらグラフ電卓を用いて視覚的に見ることを目的とした授業を行った．なお，この内容の詳細については T^3 Japan 第 12 回年会の冊子に掲載されている[２].

以下の内容は，生徒たちへ印刷をし，配布したものである．

$f(x)=e^x$ のとき，$f^{(n)}(x)=e^x$ より

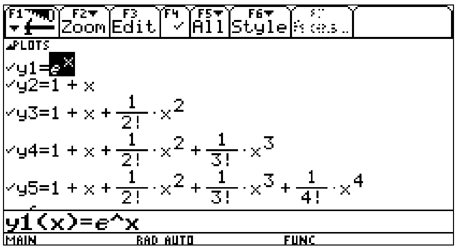
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

なので，

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

を得る．

次に，グラフ電卓の関数入力画面に $y1=e^x$ を，$y2$～$y5$ までに 4 次の近似式まで入力する．（図 1 を参照せよ.）



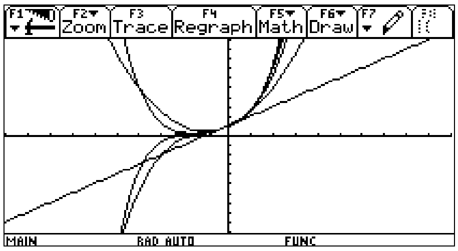
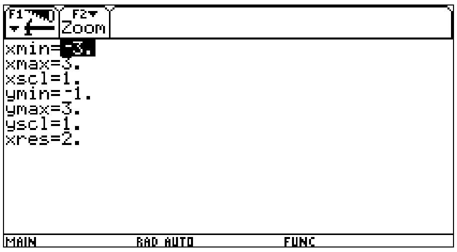


図 1　　図 2

次に，図 2 のようなグラフを書き，座標の目盛設定をする．（図 3 の画面の数値で図 4 を得る．）



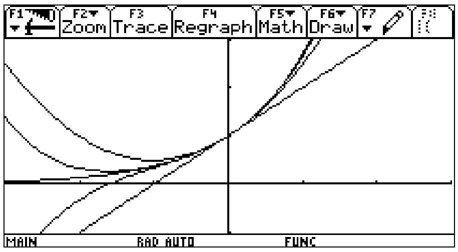
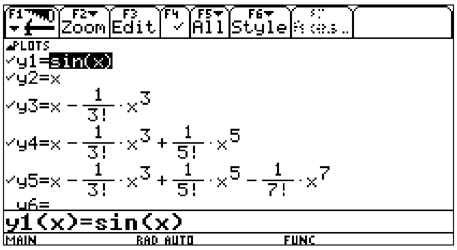


図 3　　図 4

n が大きくなるにしたがって，生徒は近似式が $y = e^x$ に近づいていくことを確認した．

同様に，マクローリン展開を用いて三角関数や対数関数についても実験をすると，次のような結果になった．



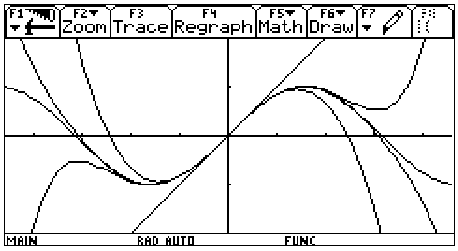
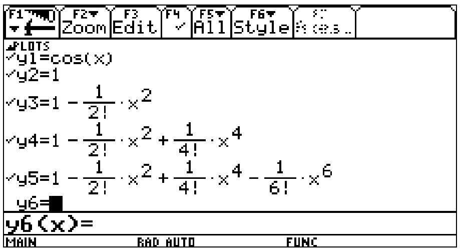


図 5　　図 6



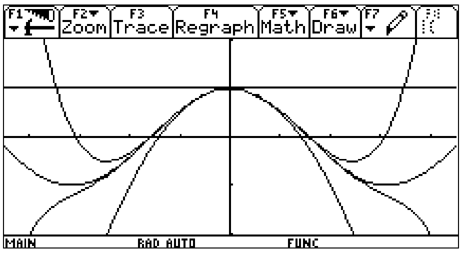
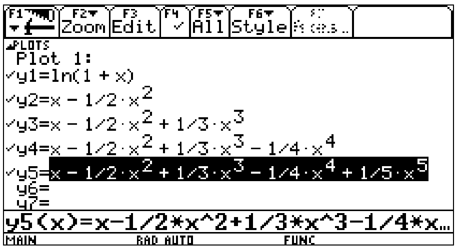


図 7　　図 8



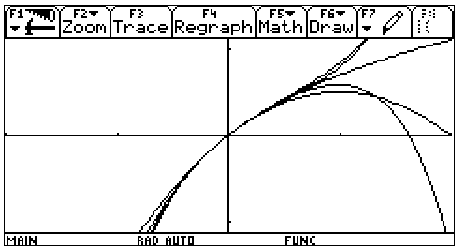


図 9　　図 10

この視覚化する授業を通して，マクローリン展開によって得られた近似式の精度について考察できる．ちなみに，生徒は n を大きくするにしたがって精度が高くなること（マクローリン展開のありがたさ）に感動をしていた．高校でのマクローリン展開の扱いは，不等式の評価のために用いることがほとんどであるが，大学の教養で学ぶ数学の入口を，実験を通して生徒と楽しみながら学習できた．

C．リーマン和を視覚化する

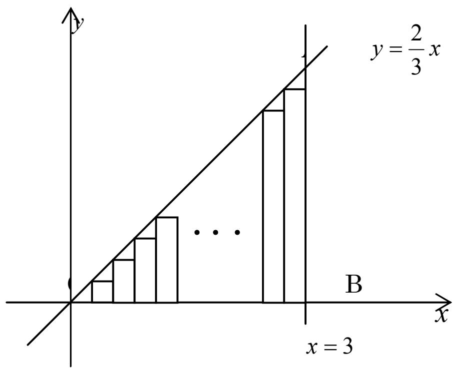
平成 21 年度の青森県立三本木高等学校附属中学校 3 年生を対象に「パップス・ギュルダンの定理」について授業を行った．その授業の中で「積分」という言葉に興味を示した生徒数名から「積分計算ができるようになりたい」という申し出があり，グラフ電卓を活用して思考実験を通しながら，リーマン和に関する内容の勉強会を行った．なお，この内容の詳細については T³ Japan 第 13 回年会の冊子に掲載されている[３]．以下の問題は，生徒に示したものである．

<u>問題１</u>　直線 $y=\dfrac{2}{3}x$ に関して，次のことを考えてみよう．

(1)　△OAB の面積を求めてみよう．

(2)　線分ＯＢを 10 等分，20 等分，30 等分して，図のような小さな帯状の図形を作り，その総和を求めてみよう．

(3)　何か気がついたことがあったら発表しよう．



この問題を考える上でモデリングすることが必要である．そのため，グラフ電卓を使うことをあらかじめ想定していた．そこでグラフ電卓に慣れてもらう目的で貸し出し，簡単な使い方（因数分解や方程式の計算など）を説明した．生徒たちは駆使しながら x，y の対応表を作り，次の結果にたどりついた．

(1)　△OAB の面積＝3

(2)　10 等分した帯の総和：$\dfrac{27}{10}$　20 等分した帯の総和：$\dfrac{57}{20}$　30 等分下帯の総和：$\dfrac{29}{10}$

(3)について

①線分 OB を細かく分けると，帯の面積の総和は△OAB の面積に近づいている．

②線分 OB を細かく分けると，△OAB との隙間の面積が減る．

<u>問題２</u>　問題１(3)の結果が正しいことをグラフ電卓で確認し，x の値とその値までの帯状の面積の総和における関係式をつくってみよう．

この問題を解くにあたって，生徒たちは話し合いをし，線分 OB を 100 等分して調べてみることにした．しかし，100 等分を今までと同じように手計算で進めることは大変であることに気付き，グラフ電卓の「Data/Matrix」の機能を利用することにした．以下はその操作方法である．

① 「c1」を反転させて「c1=seq(2/3＊x,x,0,3,3/100)」，以下同様に「c2=seq(3/100,x,0,3,3/100)」，「c3=c1＊c2」，「c4=cumsum(c3)」，「c5=seq(x,x,0,3,3/100)」をそれぞれに入力する．

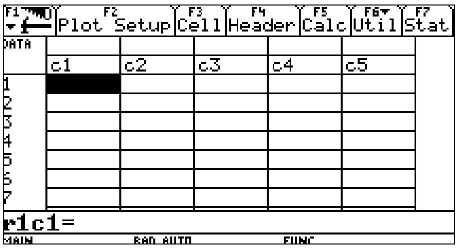


図 11

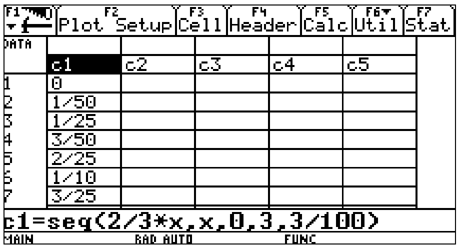


図 12

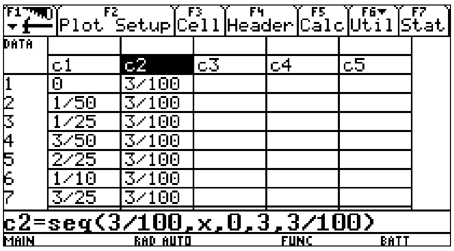


図 13

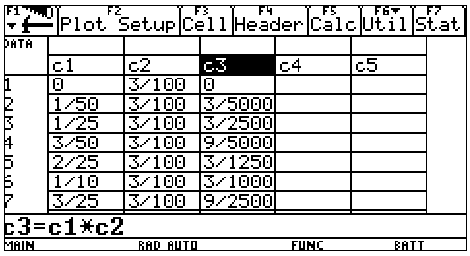


図 14

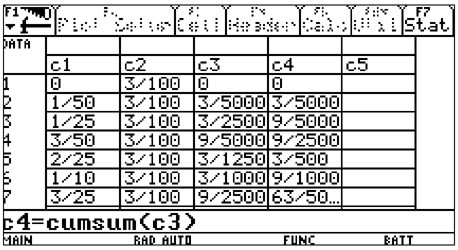


図 15

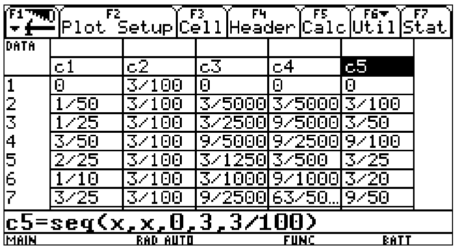


図 16

② 関数の入力画面を立ち上げ「Plot 1」を選択し，入力項目の x 軸に「Data/Matrix」の c5 が，y 軸に c4 がそれぞれ対応するように入力する．グラフを表示させ，モデリングをするために，「Y=」の画面に関数式を入力しながら関数を探す．いろいろと調べていく中で「y=1/3× x^2 」と入力したとき，ほぼグラフが重なることがわかった．

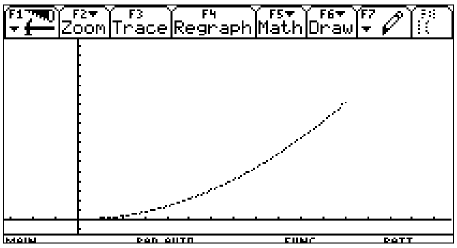


図 17

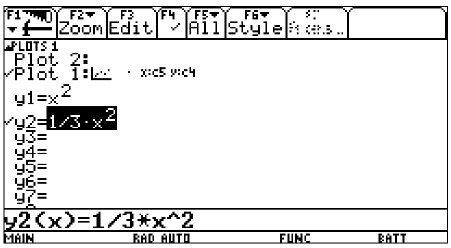


図 18

この結果から，$\int \frac{2}{3} x dx = \frac{1}{3} x^2 + C$ まで，大まかにではあるがたどり着くことができた．

§３　視覚化することの有用性について

３つの授業実践について触れたが，最初に事例にある「3 次関数の係数の考察」は，通常は扱わない内容である．しかし，手元にグラフ電卓があることで，教室において「思考実験」を行い，即座に視覚的に確認することができる．また，マクローリン展開については発表者自身，式をグラフにしてみることなどは学生時代を含めて考えたこともなかった．しかし，紙の上で計算として行っていた数学を実際に目で見ることで，生徒たちは近似の意味（ありがたさ）を知ることができる．また，この生徒たちの授業の後日談で，マクローリン展開が強く印象に残っていて，定期考査や模擬試験において実際につかってみたと報告もあった．

３つ目の授業実践で対象となった生徒たちは，現在発表者が担任をしている．この生徒たちは中学 1 年生からグラフ電卓と接しており，熱や光、音などの実験データを解析しモデリングするなど，視覚的にとらえることを継続的に行ってきている．今年度，勤務校はスーパー・サイエンス・ハイスクール（ＳＳH）に指定され，生徒個人へグラフ電卓（Voyage）の貸出をしている．日常での様子を見ていると，特に指示をしているわけではないが，休み時間等に数学の教科書に出てきた数式を入力し，グラフを描いて確認している光景を目にする．特に,「絶対値」に関しては反応が大きかった．

生徒ひとりひとりが，テクノロジーを活用して数式などをいろいろと実験的活動を通して「視覚化」していくことは，生徒自身の「考察力」の向上へつながり，さらには「数学力の向上」にもつながると確信している．

平成 24 年度からの新しい教育課程では，数学 I における「統計分野」や「課題研究」など新しい取り組みが始まる．特に「統計分野」では，箱髭図やヒストグラム，回帰直線など数値を「視覚化」する場面が今後，多くなってくるように考える．そういう意味でも，テクノロジーを活用した数学を視覚化する授業が，これからの現場に求められているのである．

参考資料

［1］ 梅野善雄:3 次関数の性質に関する高専１年生の自由研究, 数学教育研究第 7 号, p71～83, 平成 17 年 1 月

［2］ 相馬　誠：マクローリン展開の視覚化，T³ Japan 第 12 回年会，p146～149，平成 20 年 8 月

［3］ 相馬　誠：中学生と積分，T³ Japan 第 13 回年会，p138～143，平成 21 年 8 月