作図ソフトを利用したいろいろな軌跡についての探究

名古屋市立汐路中学校
金田和豊

[要　約]
本稿では，これまで筆者が作図ツールを用いて調べた三角形の諸心に関する様々な軌跡の教材化について述べる。個々の△ABC のある中心に注目して，ある条件の元に図を変形して調べてみた結果から，どのような数学的に興味深い軌跡が見えてきたか，また学習教材としてどのように利用できそうかについて述べる。注目すべき点として，軌跡を単なる「点が通った跡」と認識するのではなく，「条件を満たす点の集合」としての認識をもたせるような教材を開発する。

１．はじめに

秋山（1924）は『幾何学つれづれ草』で軌跡を次のように述べている。

①ある条件に従い，運動する点が通る道のことをこの点の軌跡という。

②ある条件に従う無数の全ての点が集合して作る線のことをこの点の軌跡という。

また，数学英和小事典によると（岡部恒治 2002）では軌跡（locus）を次のように定義している。

> 図形 F が locus とは，ある条件（C）をみたしながら動く点 P があるとき，
> ｉ）点 P は常に図形 F 上にあり
> ⅱ）図形 F 上の点は全て条件（C）を満たすならば，図形 F は点 P の locus であるという。

本稿では，表現が理解しやすい前者の定義を採用する。補足として，後者の方がより厳密に定義されている。なぜなら，例えばある条件（C）が「格子点上を動く点と原点を結んだ線分の中点」といった場合，中点の集合は図形として不連続な点の」集合となる。するとこれは前者の定義ではフォローできない。前者の定義は，前程として，‘連続に動く点’についての軌跡である。

２．問題の所在

現行の学校教育では「軌跡」の指導において，それを調べる方法としては代数的処理によるケースが多い。実際に多くの場合，問題を解く際には，方程式として軌跡を表現したところで終わってしまい，それがどのような図を描くかという点にはあまり触れられない。そのため「点が動いた跡」，「条件を満たす点の集合」という本来の軌跡の意味が欠如した扱いとなってしまう。

そこで筆者は，中学・高校における数学教育において，近年のテクノロジー導入の流れを契機として，作図ツールを利用した学習を行う中で，本来の意味での軌跡の取り扱いを学習の中に取り戻したいと考えた。さしあたり，これまでの筆者の研究対象である三角形の色々な中心について，条件（C）に対して中心 P が

どのように動き，図形 F を作るかを作図ツールを使って調べてみた。

3．研究の方法

中心の軌跡を見るために加える条件（C）を 2 つに分ける。

C1：△ABC を動かして得られる軌跡

C2：△ABC は固定して，得られる軌跡

また，C1 をさらに二つに分ける。

C11：頂点 A を，A を通り対辺に平行な直線上に動かしたときの中心の軌跡

C12：△ABC の外接円上を点 A が動いたときの中心の軌跡

3.1　△ABC を動かして得られる軌跡

例 1．重心の軌跡（C11）

点 A が辺 BC と平行な直線上を動くとき，点 G の軌跡は BC に平行な直線になる。(図 1)

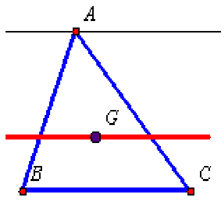


図 1

注意すべきは単に動かして直線になるという考えではなく「G は中線を 2:1 に内分する」性質から，軌跡が直線であることを説明できることが大切である。相似な図形に注目することで，軌跡と A を通る直線が平行になることを示すことができる。(図 2)　具体的には以下の問題

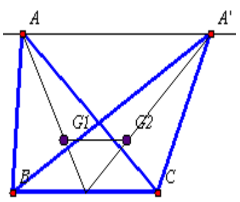


図 2

> 問題（重心の軌跡）
> △ABC の重心を G とする。A を通って BC に平行な直線上を A が動くとき，重心 G はどのような軌跡を描くか。軌跡を予想し，そうなる根拠を述べよ。

例 2．外心の軌跡（C11）（図 3）

点 A が BC に平行な直線上を動くとき，それにともなって外心 O がどう動くかを考える。

当然 BC の垂直二等分線上の点を動くことが分かる。

しかし，点 A が左右に動いても‘点 O は左右には動かない’ということが分かるためには，外心がどういう条件で与えられたものかをしっかり理解していなければならない。次の問題は，実際に筆者が中学校において実践したときのものである。

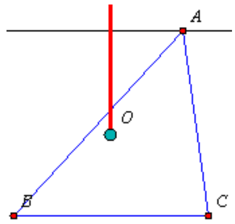
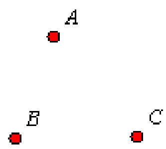
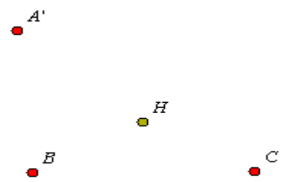


図 3

> 問題 1　図のように A 君 B 君，C 君の家がある。今，３人が互いの家から距離の等しい位置に集まって遊びに行く約束した。どこに集まればよいか？



> 問題 2　図のように A 君が引越しをした。このとき集合場所 P はどのように動くか。動くと思う方向に矢印を描いてみよう。



例 3．垂心の軌跡（C11）（図 4）

点 A が BC に平行な直線上を動くとそれにともなって垂心 H も移動する。

このときの軌跡は

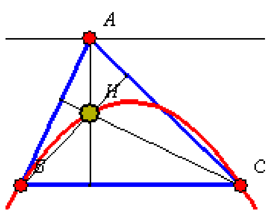


図 4

放物線になる。Cabri では，点が動くたびに点の軌跡を表示させることができるため，垂心を与える条件と，点 A が動く直線が準線であることから，点 H の動きを予想させる授業が構成できる。

> 問題
> △ABC の垂心を H とする。A を通って BC に平行な直線上を A が動くとき，垂心 H はどのような軌跡を描くか。軌跡を予想し，そうなる根拠を述べよ。

例 4．内心の軌跡（C11）（図 5）

点 A が BC に平行な直線上を動くとき，内心 I は BC の上の部分を図のような曲線を描いて移動する。この場面だけ見ていると学習者の予想としては「楕円のような形」と考えるだろう。しかし実際には，点 B，C 付近の曲線の様子から，楕円ではないことが予想できる。ここで注意事項として，手動で点 A を動かす際に交点 I は△ABC の外に出ることはない。しかし，使用するソフトによっては点 A を直線上に無限に走らせると，点 I が△ABC の外に出ることがある。図 7 このときの点 I は△ABC の点 A に対する傍心となる。つまり，図 7 のように B と C の外角の 2 等分線の交点である。内心と傍心の軌跡を同時に表示させると，図のような形になる。(図 8)

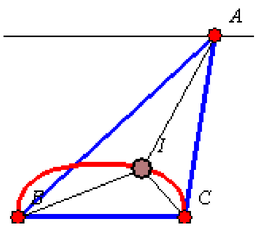


図 6

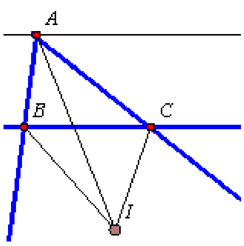


図 7

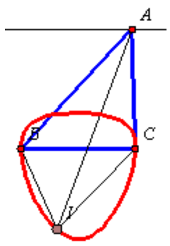


図 8

この教材の面白い点は，奇跡の形が「楕円に見えるが，でも何か違う」という予想に反した形になることである。中学生ならば，傾きの小さい放物線と考える生徒もいるであろう。しかし，実際はいびつな形であり，その意外性が学習者の探求を次のステップへと進めることにつながると考える。

授業教材の可能性としては，この場合は，軌跡の外形が，直線や二次曲線といった単純なものではないため，軌跡の形が分かったとしても，それがどのような曲線であるかを知る術がない。式で表現するとすればパラメータを使ったベクトル表記が中高生では限界ではないか。

中高生に考えさせられる問題としては，例えば，点 A の動かし方を次のように変えたとすればどうだろう。

> 問題　図 8’において，点 A が辺 BC に対して垂直上方向に移動したとき，内心・傍心の軌跡はどのように形を変えるか。予想し，説明せよ。

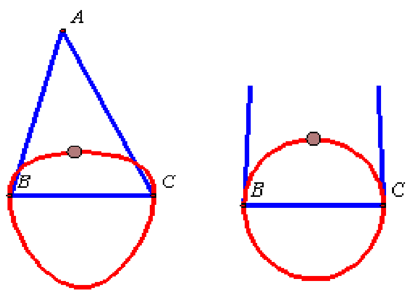


図 8’

点 A を垂直上方向に動かすとき，辺 BC に対して AB，AC は垂直になり，点外角の二等分は 45 より，△BCI は直角二等辺三角形となる。従って，BC 直径の円になることが予想できる。

次の表は，三角形の五心について C11，C12 についての軌跡の様子をまとめたものである。

	C11	C12
重心	BC に平行な直線	円
外心	BC の垂直二等分線上	外接円の中心
垂心	放物線	B,C を通る円
内心	曲線（図上部分）	B,C を通る円
傍心	曲線（図下部分）	B,C を通る円 2 つの円

三角形の五心以外の心の軌跡の例も示す。

例 5. ネーゲル点の軌跡（C12）（図４）

（ネーゲル点）
△ABC の３つの傍接円と３辺の接点を DEF とするとき，AD，BE，CF は一点に交わる。

図４は点 A を外接円上に動かしたときのネーゲル点の軌跡である。点 A が外接円上を２周して点 Na は曲線を１回描く。この軌跡は一見すると蝸牛線*のようにも見える。図 9

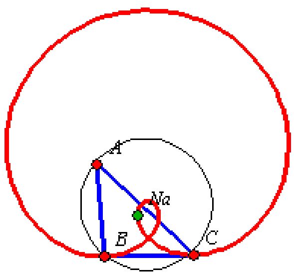
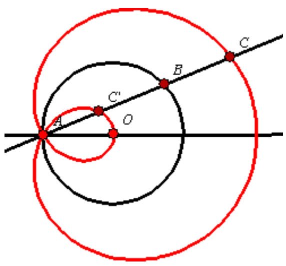


図 9

(*蝸牛線)



直線 AO に点 A で交わる任意の直線を引き，O を中心とした円との交点を B とする。B から BO と同じ長さの位置を C，C’する。A を通る直線が１回転したときの点 C，C’の軌跡はパスカルの蝸牛線と呼ばれる。この曲線を使って，定規とコンパスのみでは作図不可能な角の三等分線を引くことができる。

3.2 △ABC は固定して得られる軌跡

より正確に言えば，△ABC は固定で，ある条件を満たしながら動く点が描く軌跡ということである。筆者が探求した三角形の中心の中で，一つの三角形に対して中心が複数存在するものは，

ｉ）刈屋点
ⅱ）キエペルト点
ⅲ）刈屋点の‘内心’という条件を‘傍心’に置き換えて得られる中心

の３種類である。
これらはある条件を満たしながら，無数に存在する。その集合の形は２次曲線であることが分かった。

例 6. 刈屋点の軌跡

＜刈屋点＞
△ABC の内心を I，内接円と各辺の接点を D，E，F とする。I から D，E，F に下した線分上に L，M，N を IL＝IM＝IN となるようにとる。このとき AL，BM，CN は一点で交わる。図 10

軌跡は３頂点を通る双曲線になる。また，その集合の中には内心，ジェルゴンヌ点，ネーゲル点の３つを含んでいることが分かった。これらの点はいずれも刈屋点の特殊な場合である。図 11

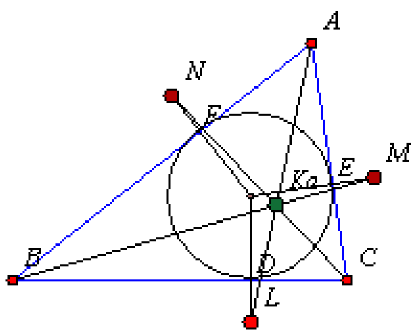


図 10

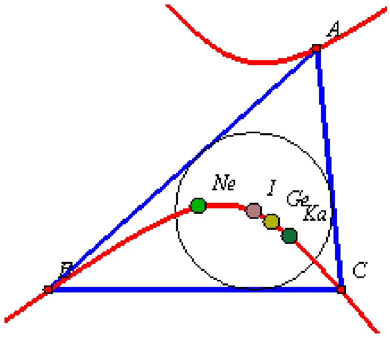


図 11

例６．キエペルト点

＜キエペルト点＞
△ABC の外側に，辺 AB，BC，CA を一辺に持つ互いに相似な二等辺角形を作り，二等辺三角形の頂点をそれぞれ D，E，F とする。このとき AD, BE, CF は一点で交わる。図 12

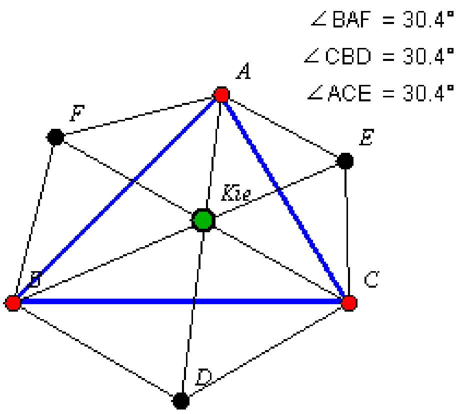


図 12

辺 AF が動いたときの点 Kie の軌跡を調べてみた。図 13 のように双曲線を描く。またその集合の内部には，重心や垂心，フェルマー点を含む。これらの中心はキエペルト点の特殊な場合として与えられることが分かった。
（AF は点 A を通って傾きが変えられる直線。AF が動く度に点 Kie（図の左から２つ目の点）がともなって動く。）

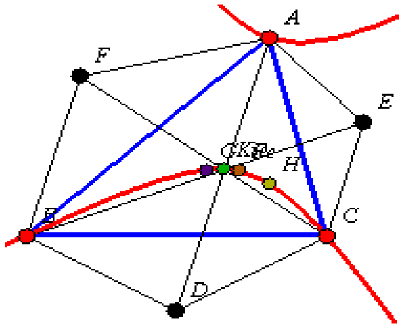


図 13

例７．刈屋点の‘内心’という条件を‘傍心’に置き換えて得られる中心

例 6 の内接円を外接円に変更し，傍心からの距離が等しい 3 つの点を，それぞれ 3 つの傍心から△ABC の各辺に下ろした垂線の上に取る。そして対するそれぞれの点を結ぶと 3 直線は 1 点に交わる３つの傍心それぞれに対して 2 次曲線が一つ決まる。図 14

この例では，2 次曲線ではあるが，双曲線ではなく楕円が現れた。授業教材としての活用を考えると，やはり生徒に軌跡がどうなるかを予想させ，何故そうなのかを議論させるといった活動ができると考えられる。

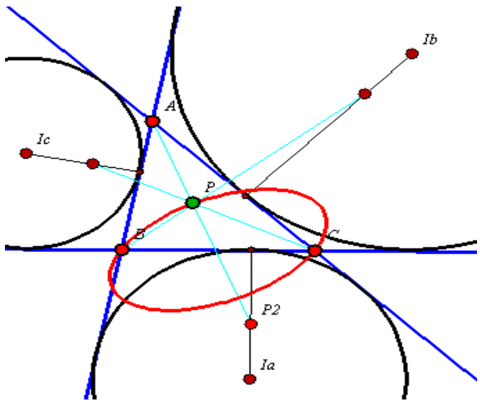


図 14

さて，軌跡の概形が何であるかを判断する上で，その裏づけとなる実験方法の 1 つを述べる。まず以下の定理を用意しておく。

[定理]（パスカルの定理）
２次曲線上に６点 A，B，C，D，E，F があるとき AE と BD，AF と CD、BF と CE の交点を L，M，N とする。

例６において，軌跡は双曲線に見えるが，厳密には分からない。しかし，作図ツールとパスカルの定理によって，これが双曲線になることを裏付ける実験はできる。

CabriGeometryⅡplus は描いた軌跡の上に作図をすることができる。表れた軌跡に対してこの定理が成り立つかどうかを試したところ，共線性が成り立っていることが観察された。厳密に言えば，この段階で共線性についての証明がいるが，作図ツールで図を動かして調べる限りは，３点が１直線上にあり，それを正しいとすれば，パスカルの定理はこの軌跡が双曲線になることを裏づけるものと考えられる。

４．結果

授業での活用を考えたとき，例えば「こう動かしたときどうなるか？」や，一部分だけ見せて「全体ではどうか？」と予想させる活動が考えられる。代数的な処理を行う前に，視覚的な考察を加えることで，探究→予想→実験→結果→探究という，自然な学習サイクルを実現させることができると考えられる。

また，これまでの例のように，中心の軌跡は，どんな条件の下で動かすかによって非常に様々である。例１から４のような軌跡と，例６，７のような軌跡とでは，様子が異なる。

例３では，そもそも垂心は１つの三角形に対して１つであるが，例６では１つの三角形に対して刈屋点は複数存在する。与える条件によってそれは変わる。

これらのことから，例えば，例６のように１つの三角形に対して複数の中心を与えるような条件はどんなものがあるかを考察することができるだろう。また，集合という点に注目すれば，例えば，例３の垂心が成す集合は，例６刈屋点に，条件（C11）を追加したときの中心が成すより大きな集合の部分集合であるという考察もできる。

作図ツールで表示する点の軌跡は，学習者が単に軌跡を「点が通った跡」と考えるのでなく，「条件を満たす点の集合」というイメージを持つための，１つの視覚的な学習教材になると考える。

５．考察と今後の課題

本稿で紹介した例を含めて，具体的な学習教材としては完全なものはまだまだ少ない。今後は筆者自身による探究活動の中から姿を見せたいくつかの数学的事象を，‘作図ツールを使って行う授業で扱えるような，具体的な問題’として利用できるよう整備する。

６．参考文献

秋山武太郎（1993）「幾何学つれづれ草」サイエンス社

飯島康之(1992)「数学的探究のための環境としての作図ツールー事実の収集可能性と数学的知識の実行可能性の観点からの考察－」『数学教育論文発表会論文集』

岡部恒治（2002）数学英和小事典

金田和豊(2007)「作図ツールを利用した三角形の諸心の軌跡に関する探究について」日本科学教育学会東海支部資料