

「数学 A」における図形の指導

- テクノロジーを用いた数学的活動で理解を深める -

東京女学館中学校・高等学校 半田 真

1 はじめに

現行学習指導要領から平面幾何の円に関する内容が高等学校の「数学 A」に移行してきた。以前は、接弦定理や円に内接する四角形の性質・三角形の内心・外心・重心などは中学校で扱っていた。しかし、今は高等学校で扱う。また、以前は中学校で扱っていなかった方べきの定理や2つの円の位置関係などもここで扱う。それに加えて、図形の学習では従来から証明に関する指導が重要視されている。しかし、生徒にとって図形の証明は苦手意識を持つことの多い分野でもある。その証明を生徒自ら考え、主体的に示そうとする姿勢を導

き出すような指導が必要でもある。しかし、実際の授業では図形の性質を探るのに学習者に十分考察の時間を割くことができず、理解を深めるような指導はなかなか実践しづらいのが現状である。

2 研究の目的

そこで、図形の指導を通して生徒が主体的に考え、自ら図形的な性質を発見していく様な教材及び指導法を探ることとした。さらに、発展的な内容を盛り込みながら学習者の主体的な探究活動を促す指導を試みた。



図 1: 授業中の様子 1



図 2: 授業中の様子 2

3 授業の進め方

中学校での図形学習の内容を図形ソフト Cabri を操作することで復習し確認する。教科書で紹介している性質などを Cabri で再現し、教科書に記されている性質を確認する。その際、条件を変えてもそれらの性質が成り立っていることを図形を動かしながら確認させる。その上で証明を考えさせる。さらに、教科書の性質をもとに問題の設定を変えて別の内容の性質が見つけれないか探究させる。その際の注意点として、考察・探究活動に十分時間を割き、自ら様々な性質を見つけ出させる。見つけた性質がなぜ成り立つかを考えさ

せ、証明したいという動機付けに導く。

6 に示した教材を用いて授業を行った。第 1 回目の授業では Cabri に慣れるための問いとして、1, 2 を扱う。この 2 つの問いに関しては教員が操作をするのと同時に生徒たちにも操作をさせ、Cabri の使い方を教えていくことをねらいとする。角の二等分など中学校での既習事項を Cabri の操作を通じて確認しながら内心・外心などの性質にも気づくよう誘導を試みる。この問題を扱うことで Cabri 操作で気づいた点などを列挙する活動も取り入れていく。具体的には、2 問目の最後で予想し、Cabri で確認させ、証明の必要性を実感さ

せるよう指導していく。

さらに次の時間で問題 4, 5 を考察し, 条件を変えて新たな性質を発見する活動を行わせる。見つけた内容で新たな問題を作らせ, その証明まで考えさせる。

4 実践内容

本実践は, 私立高校 3 年選択授業「数学演習」で, 生徒 38 名を対象に平成 22 年 6 月 1 日(火)10:45~12:35(指導時間 100 分)および 6 月 8 日(火)10:45~12:35(指導時間 100 分)の一斉授業として行った。使用したソフトウェアは「Cabri II-plus」で一人一台を使用。

4.1 問題への取組

まず, 第 1 回目の授業では Cabri の操作に慣れることを目的に外心と内心の作図を行った。その上での探究活動として三角形を動かすことで外心および内心の性質を視覚的に確認した。次に, こちらから「外心と内心が重なるような三角形はどのような三角形か」という問いかけに対し, 予想を立て, Cabri を操作することで確認し, 演繹的な証明へと考えさせていった。

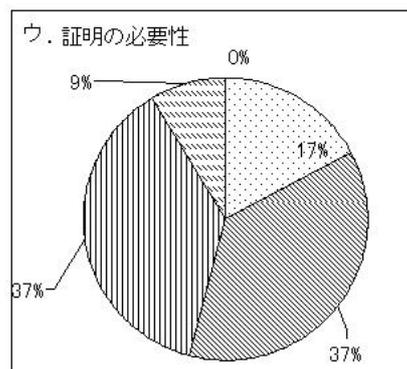
翌週の第 2 回目の授業では, シムソン線の定理と 9 点円の定理を扱った。どちらも中学校の図形教材として扱われることは少なく, 高等学校ならではの内容と考えて選んでみた。これらは大変有名な定理なので幾何学に関する参考書等では必ずといってよいほど紹介されている。ただ, 中学校で扱うことはまれなので, 高校生になって初めて学習するという生徒も多い。それ故, Cabri で動かしながらの探究とはいえ, どこまで定理の内容に迫れるか, 果たしてシムソン線の存在や 9 点円の存在に気づく者が現れるのか少々心配していた。

4.2 展開・探究の様子

すべての生徒にとって Cabri を操作することは初めてであった。そのため, Cabri の機動から説明し, 3 点を打ってそれらを線分でつなぐことからはじめ, 線分の垂直二等分線の作図や角の二等分線の作図などを一緒に操作しながら進めていった。その上で描いた外心と内心及び外接円と内接

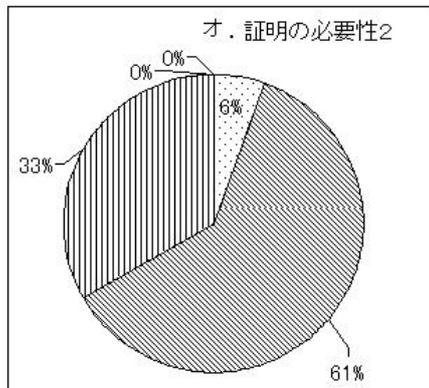
円がきちんと描けたかどうかを各自画面上にて確認していった。その後「外心と内心が重なるような三角形はどのような三角形か」というテーマで探究を始める。最初の予想から「正三角形」と予想してくる者が多い中「二等辺三角形」と予想する者もいた。しかし, Cabri での探究を通じてすぐに「正三角形」であることを見つけていた。問題はその後の演繹的な証明だが, なかなか思うように証明を記していない様子が見えなかった。また, 「仮定」と「結論」をはっきりとらえていない者も多く, 「仮定」「結論」ともに「正三角形」と記した解答も目立った。

これら一連の作業後「(演繹的な)証明の必要性を感じたか」についてはアンケートの結果(次の円グラフ)から約半数の生徒はその必要性を感じていた。その反面「Cabri で証明できた」ととらえてしまった者もいたようで「見つけた性質がなぜ成り立つかを考えさせ, 証明したいという動機付けに導く」という点では指導し切れなかった事が浮き彫りとなった。



第 2 回目の授業では, ある程度 Cabri の操作にも慣れ, 作図はスムーズに進んでいった。問題 4 のシムソン線の定理についてはこちらからの問いかけになかなか反応がえられなかったが, 円周上の点 P を動かす(2)の作業)だけではなく三角形そのものも頂点を動かして形を変えていく(3)の作業)ことでどんなことが言えるか聞いていったところ「点が消える」とか「2 点しか現れない」といった発言が出てきた。辺の延長上に垂線の足を取っていないためのものであった。そこで, 辺を延長してその直線上に垂線をとるように指導し探究させていった。しばらくして「一直線上にあるみたい」といった発言が現れてきた。そこで「一直線上にあることを Cabri で確認できるようにする」よう指示したところ, 3 点 D, E, F のうち 2 点を通る直線を描き確かめた者が複数現れ

た．そのうちの一人の画面を全員に転送して確認させ「これで証明(できた)といえるか」問うた．今回は，前回のように自明に近い内容ではなかったせいか，7割近い生徒が(演繹的な)証明の必要性を感じていたようだ(下の円グラフ参照)



さらに，9点円の問題では，意外と早い段階から「(9点円が)同じ円周上にある」「同一円周上の点である」といった発言が出てきた．Cabri を用いての考察に慣れてきたのか早い段階からの気づきが見られた．それを「Cabri で確認できるようにする」事については少々考えを巡らせていた．最終的にはこちらから「3点で決まる円を考えては」というヒントを出してから，Cabri での確認が可能になっていった．

4.3 本時のまとめ

第1回目の授業では，外心と内心が重なるような三角形を「正三角形」と予想することは多くの生徒ができていた．直観的にも理解のしやすい内容だったのであろう．しかし，その内容をきちんと証明するという点では課題が残った．命題の仮定と結論を記す場面でも仮定と結論の区別が曖昧な者が目立ちこうした論証部分の学習を苦手としている様子が見られた．6の教材とともに示した授業アンケートの「仮定」と「結論」の区別はつけやすかったか?」に対し，肯定的な回答をした者は半数以下であった．

第2回目の授業では，シムソン線や9点円の定理を扱ったが，Cabri を用いた探究活動の成果がうまく現れたと考える．気づきがないまま進んでしまうかといった筆者が当初心配していたような事はなく，生徒たちは自分たちで作図した図を動かしながらシムソン線の性質や9点円を見だしていた．第1回目の「正三角形である」という発

見ほど簡単にはいかなかったようだが，それでも授業アンケート結果を見ると86%もの生徒が「図形を動かして見ることで，気づいたこと(発見した図形的な性質)があった」と回答している．やはり図形を動かしながら観察できるという活動は「生徒が主体的に考え，自ら図形的な性質を発見していく」という点で効果を上げていると考える．

その一方，演繹的な証明の必要性を感じながらもなかなか証明を完成させるまでには至っていかかったり，問題作りまで到達していないなど今後課題を残す授業実践となった．

以下に，授業アンケートの自由記述欄からいくつか代表的な意見をあげる．

- いつも自分で作図するとよくわからなかったけど，正確に図が一致することとかすごいわかりやすかった．
- 自分で図形を動かすのは初めてだったので，いつものノートより理解が深まった．
- 実際に図を動かしてみることで理解が深まったと思う．
- 実際図形を描いてみて，そして動かしてみることで，口頭で言われただけでは想像しづらいものも，理解しやすくなった．
- すんごくおもしろかった!! なんとなくが，ちゃんと説明できました．ただ何でそうなるかがわからないので証明を知りたいです．
- 今日の(第2回授業内容)はなかなかひらめかず苦戦しました．
- 証明するのが難しいなと思いました．性質を見つけるのが大変でした．
- 先週より作図がスムーズにいった．ゆえに，理解がより深まった．証明が難しいです．
- 気づいた点というのは，なかなか言葉にできず，難しいです．
- 難しかったけど，前回より探求心が生まれたので楽しめました．たまたまですが，5の(5)で円に重なるの(9点円)を見つけうれしかったです．

- 今まで気づけなかった性質がたくさんあっておもしろかった。
- おもしろかった。いろんな事が、作図してみてもわかった。

5 今回の教材・実践と数学的活動

高校生に対しての数学的活動は具体的な事象や身近な事象との関連が必須と言う訳ではなく、内的な活動としての側面も必要とされている。今回の授業実践は、学習者の考察内容を手助けするといった内的な活動の補助という側面からの数学的活動と考えたい。アンケートの自由記述にもあったように、Cabri で図形を動かしながら探究していく中で「理解が深まった」とか「口頭で言われただけでは想像しづらいものも、理解しやすくなった」といった意見が見られた。こうした活動からシムソン線のように「3点が一直線上にある」といったような性質が成り立ちそうである事を予想できたわけである。ゆえに目標の一つである「活動を通じて自ら図形的な性質を発見していく」ことができたという点で今回の教材による授業実践は目的を達成できていたと考える。

しかしながら「気づいた事柄を積極的に証明する態度を養う」という目的は残念ながら十分指導

し切れていたとは言い難かった。やはりアンケートの自由記述にもあったように「ただ何でそうなるかがわからないので証明を知りたいです」とか「証明するのが難しいなと思いました」のように演繹的な証明の必要性は実感しながらも難しく断念していた者が多かったようだ。また、Cabri で確認してそれで証明したと見なしてしまうなど、演繹的な証明の必要性をこちらから助言しないと気づけない者もいた。特に、第1回目の授業ではその傾向が見られた。こうした点の改善策としては、「自分の言葉」で表現することで生徒たちに問題に対してもっと主体的に関わる場を用意し、各個人の頭の中に構築されたイメージを体系化する「言語化」の活動を取り入れていく必要がある。アンケートの自由記述の中にも「気づいた点というのは、なかなか言葉にできず、難しいです」といった意見があった。自分で気づき、考えたことを表現する機会は必要なのだと感じた。生徒たちが気づいた事象を皆の前で発表させ説明させる場が必要かと考える。そうした機会を設けることで「なぜその(気づいた)性質が成り立つのか」といった質疑が生じてくるはずであり、発表者はその問いに対する回答を用意せざるをえないはずである。演繹的な証明を主体的に行わせるためには、今回の教材ではもう一工夫必要であったようだ。

6 教材

1. Cabri で $\triangle ABC$ を描き次の作図をせよ．

- (1) $\triangle ABC$ の各辺の垂直二等分線を作図，それらが1点で交わることを確認せよ．
- (2) その交点 O を中心にした半径 OA の円を描き， $\triangle ABC$ の各頂点を動かしたとき，気づいたことを列挙せよ．
 - ① 動かすものは何か？ …
 - ② 動かしても変化しない性質は？ …
 - ③ その他，気づいた点 …

2. 前問の $\triangle ABC$ に次の作図を追加せよ．

- (1) 3つの角の二等分線を作図し，それらが1点で交わることを確認せよ．
- (2) 交点 I から辺 BC に下した垂線を作図せよ．また，その垂線の足を H とする．
- (3) その交点 I を中心にした半径 IH の円を描き， $\triangle ABC$ の各頂点を動かしたとき，気づいたことを列挙せよ．
 - ① 動かすものは何か？ …
 - ② 動かしても変化しない性質は？ …
 - ③ その他，気づいた点 …
- (4) 内接円の中心 I と外接円の中心 O が重なるような三角形はどのような三角形か，予想せよ．
- (5) (4) の予想を Cabri で確認せよ．
- (6) (4) の予想結果が正しければそれを証明せよ．予想が誤っていたら正しい結果を述べそれを証明せよ．その際「仮定」と「結論」が何かはつきり分かるように記すこと．

「仮定」：「結論」：「証明」：

《授業アンケート》

① 図形を動かして見ることで，自分にとって新たな発見があったか？	あった				ない
	5	4	3	2	1
② 図形を動かして見ることで「仮定」と「結論」の区別はつけやすかったか？	はい				いいえ
	5	4	3	2	1
③ 図形を動かして見ることで，見つけた性質を証明する必要性は感じたか？	感じた				感じない
	5	4	3	2	1
④ 感想，その他					

4. $\triangle ABC$ の外接円の周上に任意の点 P をとる．この点 P から 3 辺 BC , CA , AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D , E , F とする．点 P が円周上を動くとき, 3 点 D , E , F の位置関係について以下の手順で考察せよ．

- (1) 題意のような図形を Cabri を用いて作成し, 3 点 D , E , F をとれ．
- (2) 円周上の点 P をいろいろ動かすことで, 3 点 D , E , F がどのように動くか調べ, 気づいたことを列挙せよ．
- (3) $\triangle ABC$ の頂点を動かして形をいろいろ変えることで, 3 点 D , E , F がどのように動くか調べ気づいたことを列挙せよ．
- (4) (2), (3) の考察の結果, 3 点 D , E , F はどのような位置にあると言えるか, 予想せよ．その際, 予想の根拠となった図形の動かし方を簡単に記せ．
- (5) (4) の予想を証明せよ．
- (6) この問題の条件を一部変えて (あるいは付け加えて), 新たな問題を作成せよ．あるいは新たな性質を見つけよ．

5. Cabri を用いて, 新たに $\triangle ABC$ を描き, 次の作図を行え．

- (1) $\triangle ABC$ の垂心を H を作図せよ．その際, 各頂点から対辺に引いた垂線をそれぞれ AP , BQ , CR とせよ．
- (2) $\triangle ABC$ の 3 辺 BC , CA , AB の中点 D , E , F を作図せよ．
- (3) 3 つの線分 AH , BH , CH の中点 L , M , N を作図せよ．
- (4) $\triangle ABC$ の頂点を動かして形をいろいろ変えることで, 9 点 D , E , F , L , M , N , P , Q , R がどのように動くか調べ, 気づいたことを列挙せよ．
- (5) (4) の考察の結果, 9 点 D , E , F , L , M , N , P , Q , R はどのような位置にあると言えるか予想せよ．その際, 予想の根拠となった図形の動かし方を簡単に記せ．

《授業アンケート》

① 図形を動かして見ることで, 気づいたこと (発見した図形的な性質)があったか?	あった				ない
	5	4	3	2	1
② 図形を動かして見ることで, 気づいた性質を 証明する必要性は感じたか?	感じた				感じない
	5	4	3	2	1
③ 4.(6) の問題を作ることで図形の性質について 理解が深まったと感じたか?	感じた				感じない
	5	4	3	2	1
④ 感想, その他					