「三角関数の公式で計算しよう！積和公式に親しむ」

河合　伸昭　　岡山県立岡山南高校

1.　以前の T3 公開授業で、対数は、ネピアによって掛け算を足し算に、割り算を引き算に変換することによって、計算を効率化するために考え出されたという話をしました。ところが、ネピアのこの発想はヒントになったものがあったのです。

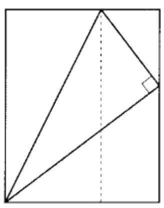
じつは、この積を和に変換する方法はすでに、あの天文学者ティコ・ブラーエの天文台（デンマークのベーン島にあるウラニボルグ（天の城）と呼ばれていた）で使われていたのです。それは、三角関数表を用いて積を和に変換し、計算するというものでした。

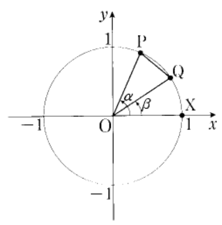
ここでは、その方法はグラフ電卓を用いると手軽に実行できます。それによって、数多い三角関数の公式の中でも最も複雑で、受験のための公式のように感じられていた積和公式が、最も基本的な数値計算に活用されていたことを実感できます。そして、その方法は意外な方面への応用を生み出す可能性を秘めていたのです。

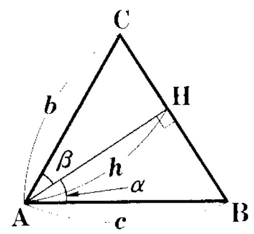
２　三角関数の加法定理

三角関数では、角度の和の三角関数を求めるには、加法定理を用いなければなりません。しかし、加法定理を証明できる生徒は少ないでしょうから、加法定理の証明を紹介してみます。「君はﾌﾟﾄﾚﾏｲｵｽを超えられるか」では、ﾄﾚﾐｰの定理を用いた証明を紹介しましたが、教科書にはその他の証明がざっと数種類載っていました。

三角比の原理から　単位円と距離の公式・余弦定理　　余弦定理（第一第二）







３　加法定理から積和公式

今導かれた、加法定理は、次のようなものです。

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$　・・・　④

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$　・・・　⑤

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　・・・　⑥

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$　・・・　⑦

これから積を和（差）に変えるとは $\sin\alpha\cos\beta$、$\cos\alpha\cos\beta$、$\sin\alpha\sin\beta$ を $\sin(\alpha+\beta)$、$\sin(\alpha-\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$ で表すと言うことで、⑤の変形をすればよい。

（④＋⑤）÷２より $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

（⑥＋⑦）÷２より $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

（⑦－⑥）÷２より $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

積和公式と半角公式

sinxsinx　と　cosxcosx を　同じように積を和に変えれば

$$\sin x \sin x = \sin^2 x = \frac{1}{2}\{1 - \cos 2x\}$$

を用いて、

$$\cos x \cos x = \cos^2 x = \frac{1}{2}\{1 + \cos 2x\}$$

と半角公式を導くことができる。　cos の倍角公式から導くより直接的である。

４　積和公式で計算してみよう。

ここまで、準備ができると、掛け算が実際に掛け算の計算を行わず、たし算と三角関数表を引くことだけで、実行できます。まず、掛ける二つの数を三角関数を用いて表します。それは、三角関数表を逆に引き、対応する角度α,βを求めることです。電卓では、sin-1,cos-1 を用います。つぎに加法定理をつかって積を和になおします。計算では、$\alpha+\beta$，　$\alpha-\beta$　を求め、表を引き、その和および積を計算するだけです。

(a)　実際に、次の計算を正弦の加法定理を用いて掛け算を用いずにやってみましょう。

９９６２×７３１４　　まず　０．９９６２×０．７３１４×１０^8　　とし

$\sin^{-1}$（０．９９６２）　、$\cos^{-1}$（０．７３１４）　を求める

ここで　加法定理　　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

を用いて、

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

これから　０．９９６２×０．７３１４ ＝ sin（　　　）　cos（　　　　）

$\alpha+\beta$　　$\alpha-\beta$

sin（　　　）　cos（　　　　）　＝　　　　　（　　　　　　　　　）

ここで、数表を引き、１０^8　を掛けると　　（　　　　　　　　　）

（　　　）算を用いずに（　　　）算だけで、計算できたことになる。

練習①

①　29237 × 57358　　　　②　83867 × 12287

③　62932 × 54464　　　　④　48481 × 39073

課題１

同じように三角関数の表、公式を用いて、割り算をすることを考えてみましょう。
どう公式を使えば最も簡単にできるでしょうか

課題２

平方根を求めることも考えてみましょう。

５　積和公式の微分・積分への応用

次に　数学Ⅲの範囲になりますが、三角関数の微分・積分を考えてみましょう。

微分

まず微分ですが　sinx　の微分の定義の式は　$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$　です。

この分子の部分を変形するのは、加法定理を使って、共通因数でくくり、半角公式を使うという手でも出来ますが、かなり極限の変形になれていないと難しいでしょう。
一方、公式そのものは難しいですが、積和公式を使うと一本道です。

$\alpha+\beta=x+h$ ･･･①　$\alpha-\beta=x$ ･･･②　とおけば　$\alpha=x+h/2$, $\beta=h/2$ と求められ

分子は　$-2\cos(x+h/2)\sin(h/2)$　となり

$\lim_{h\to 0}\dfrac{-\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h/2}$ と変形でき　$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(h/2)}{h/2}=1$　ですから

$-\cos x$ と求められます。　これは、cos x　の微分でも同じです。

不定積分

次に積分です。微分には積の微分公式がありますが、積分にはそのような公式はありません。強いて言えば、部分積分ですが、これはなかなかマスターするのが大変です。
例えば　$\int \sin x\cos x\,dx$　を考えてみましょう。これは倍角公式を使えば積分できますが、部分積分でも出来ないことはありません。しかし移項するなど、変形の先が読みにくいものとなります。

$\int \sin 2x\cos 3x\,dx$　となると、これは積和公式を使わないと、係数がややこしく非常に間違いやすくなります。
積和公式を使うと $\sin 2x\cos 3x=\dfrac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$ となり基本関数の積分です。

定積分

ここまでは、単に不定積分の計算ですが、定積分、とくに三角関数の基本周期
０から２πでの定積分を考えると　おもしろい性質が分かります。
周期が２πの三角関数の０から２πでの定積分は０ですから

$\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mx\,dx = 0$　となりますが　sin 同士　ですと

$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mx\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}s(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}((1-\cos(n+m)x)dx =$

（ ∵ cos0=1 ）　ですから　1 /2 の積分の項が　πとなって

$$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \begin{cases}\pi & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$

となります。cosnxcosmx　の場合も同じです。
この積分は、教科書の章末問題に出ていますし、入試でも、基本問題としてよく出題されています。

そしてフーリエ級数の原理へ

これを使うと、ある関数が様々な周期の三角関数(sin と cos)の和でできているとき sinnx (cosnx) (n=1,2,3・・・) をかけて、０から２πまで定積分すれば、 sinnx(cosnx)の三角関数の係数を求めることができます。

これは、フーリエが考えて、今では色々なことに応用されています。Ｔ３でも第８回大会で、福井高専の坪川先生がグラフ電卓を用いて楽器の音声波形を周波数成分に分解し、またそれからもとの波形を再現するという発表を行われていました。

ゲーム形式で

たとえば y= ２ sin2x＋３ cos 5x とします。しかし、この y の三角関数での表示式(右辺)は分かっていなくて、その値(データ),波形のみが分かっている。そして、データから定積分は近似計算できるとします。sinnx と cosnx (n=1,2,3・・・) をかけて、０から２πでの定積分をグラフ電卓で計算すれば、sin2x と cos5x をかけた場合の他はほぼ０になり、sin2x をかけた場合はほぼ２π、sin5x をかけた場合はほぼ５πとなり、それぞれπで割れば sin2x 、cos 5x の係数２と５が求められます。

したがって y= ２ sin2x＋３ cos 5x という式が求められることになります。

定積分の結果の表

	sinx,sin2x・・・sinnx をかけて定積分を実行した値	cosx,cos2x・・・cosnx をかけて定積分を実行した値
x	-8.35×10^{-13}	0
2x	6.2831853 (=A)	6.309×10^{-13}
3x	-5.31×10^{-13}	1.8×10^{-13}
4x	0	1.074×10^{-13}
5x	1.944×10^{-13}	9.424778 (=B)

電卓の操作

Y1 に sinxY0 と入力します。Y0 は VARS → Y-VARS → 1:FUNCTION で Y0 が入力できます。定積分は Y1 のグラフを描かせた状態で, 2nd(青色のｷｰ) を押してから TRACE を押して、 7: の積分記号を選択、定積分の上端・下端を入力すると,定積分の値が表示されます。

y=Asin2x+Bcos5x とおけ、 A=6.2831853 , B= 9.424778 で A/2π≒２, B/2π≒３ であるから、 y=2sin2x+3cos5x と求められる。

係数当てゲーム

① 二人一組で行います。

② 出題者側と解答者側に分かれます。

③ 出題者側はグラフ電卓の Y= のキーを押し、Y0 に三角関数の式を入力します。
適度な労力で解答できるよう sinx,sin2x・・・sin5x, cosx,cos2x・・・cos5x までの二、三項の式とします。二台に同じように入力します。

④ 一台は、グラフを描かせ、解答者に見せます。
もう一台は、Y0=のイコールを 白抜きでない状態にして(白抜き状態でエンターを押します)、解答者に渡します。

⑤ 解答者は、Y0 を見ずに(Y1 から Y5 までを使うようにします。)、上でやったように、定積分で係数を決定します。

⑥ 求められた関数のグラフを描かせ、出題者のグラフと一致しているか確認します。