「放射性物質の半減期」を 中学3年関数で扱ってみる

西山寿延
伊万里市立滝野中学校

1　はじめに

東日本大震災にともなう福島第一原子力発電所の事故に関する報道などで「放射性物質の半減期」について度々耳にするようになった。放射性物質が崩壊して、その物質の量が半分になるまでの時間が「半減期」であるが、Newton(2011年7月号)の記事にあるように「(半減期の)2倍の時間がたつと放射性物質は完全になくなる」との誤解も生じやすい。福島の原発事故の事態収束の見通しが立たず、「放射線を正しく恐れる」ことの必要性が言われる中で、日頃の(中学校)数学の授業の中でも何らかの手立てが取れないだろうかと考えていた頃にこの記事に出会った。

半減期について数学できちんと扱うには微分方程式が必要であり、一般的な関係式を理解するには自然対数の底 e や累乗を実数にまで拡張することが必要で、本来は高校数学以上で学ぶ内容ではある。しかし、教育課程実施状況調査や国際的な学力調査の結果から明らかになった「思考力・判断力・表現力等のいわゆる読解力」、「知識・技能を活用する力」といった課題を解決するために、

- 数学を学ぶ意欲を高め、その意義や有用性を実感できるように、日常生活との関わりの中から題材を取り上げること
- 数学が科学技術を支え相互に関わりながら発展してきていることを伝えるために、他教科やより進んだ数学との繋がりを重視すること

が必要であり、その具体的な取り組みとして「放射性物質の半減期」をとりあげ、平成20年1月の中央教育審議会答申を受けて改訂された新学習指導要領で再び高校数学Iから中学3年に移行した「いろいろな事象と関数」の中に位置づけることは可能である。

そこで、「放射性物質の半減期」について中学生でも理解できるようなICT機器を利用した授業のあり方を探るために本主題を設定した。

2　研究の仮説

放射性物質の半減期について、ICT 機器を利用して数量関係を調べる数学的活動*1)を行えば、中学3年でもその関数関係について理解することができるであろう。

3　教育課程上の位置づけ

半減期 t の放射性物質が今 a 個あるときに時間 x 経過後の放射性物質の個数を y 個とすると指数関数

$$y = a \times 2^{-\frac{x}{t}} = \frac{a}{2^{\frac{x}{t}}} = \frac{a}{\sqrt[t]{2}^{x}}$$

となる。これはもちろん中学校の指導要領外の内容であるが、既に移行措置として先行実施されている新学習指導要領では中学3年の関数で扱う内容として「いろいろな事象の中に、関数関係があることを理解すること」が追加され、指導要領の解説には「これまでの学習の上に立って、比例、反比例、一次関数、関数 $y = ax^2$ とは異なる関数関係について指導する。」とあり、「二つの数量の関係を式で表すことが困難な場合であっても、これまで学習してきた表やグラフを用いて変化の対応の様子を調べ、その特徴を明らかにする」とある。そして、そのような経験を通して関数についての理解をより一層深め、事象の考察に生かそうとする態度を育て、より高度な学習の素地となることが期待されているので、この「いろいろな事象と関数」の一つの例として半減期を扱うことができる。

単に「高校以上の内容だから」と扱わないのではなく、中学生でも理解できる形で取り扱い、放射能に対する正しい理解へ繋げていくことは、数学が科学を理解する土台であり、日常生活とも繋がっていることを認識させる上でも大切なことであると考える。

4　教材化の実際

半減期を教材にした数学の授業目標を前途した雑誌の記事にあるような「半減期の2倍の時間がたつと完全になくなる」という誤解を解き、既習のものとは異なる関数であることを理解させることとして、その扱い方を考えてみたい。

4.1　半減期を1日にして変化の様子を調べる

「半減期の時間が経つにつれ、どんどん半分になっていく」ことが理解できれば、変化のようすを捉えやすくするために半減期を一日として、1000 の半分で 500、その半分で 250、その半分で 125 $\cdots$ と計算で求めることができるようになる。計算は次第に煩雑になり、能力差も出やすくなるが ICT 機器を用いることで、その解消を図りながら表やグラフにして特徴を調べることができる。半減期が 1 日だと 10 日 (あるいは半減期の 10 倍の時間で) で 0.1%まで減ることは印象に残りやすい現象であるが、そのことも簡単に確かめられる。

*1) 半減期について実際に計算したり、表やグラフに表したり、式で表したり、表された式の意味を考える活動

表 1: 半減期が 1 日の場合、日毎に半分になっていく

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1000	500	250	125	62.5	31.25	15.63	7.81	3.91	1.95	0.98

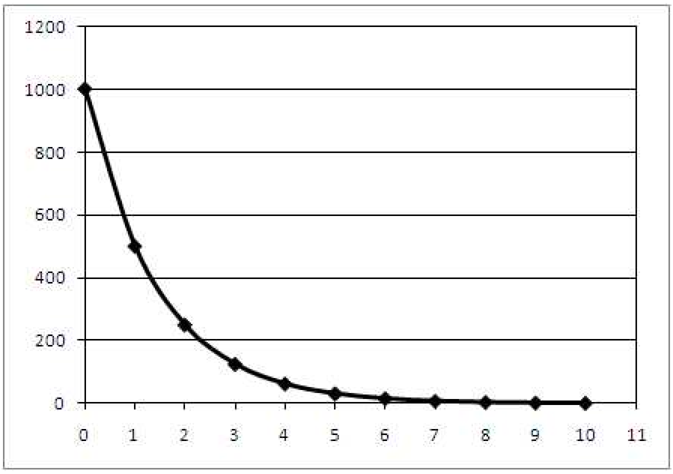

図 1: 半減期が 1 日の場合のグラフ

また、変化の様子から「反比例」と考える生徒が出てくることも想定されるので、反比例の復習をしながら、違いを確認していくことで、既習事項を「わかりなおす」螺旋的な展開も考えられる。

4.2　関係式をどうやって導くか

関係式に表わすことは、必ずしも求められているわけではないが、「課題学習」として、関係式を考えるなかで「根拠を明らかにし筋道をたてて体系的に考える」活動や「言葉や数、式、表、グラフなどの相互の関連を考える」活動を取り入れることで、数学的な思考力・表現力・判断力が育まれることが期待できる。

半減期が 1 日のときは、表を作る取り組みの中で具体的な計算作業を行っているので、計算の手順を表 2 のように捉えることで中学生でも関係式を導くことは可能である。

x の値が $\frac{1}{2}$ する回数になるので

$$y = 1000 \times (\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}) \times \cdots = 1000 \times (\frac{1}{2})^x$$

$(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{2^x}$ から

$$y = \frac{1000}{2^x}$$

となる。

式が出てきた時点で $x = 1$ で $y = 1000 \div 2 = 500$、$x = 2$ で $y = 1000 \div 4 = 250$ 等に直し、先の表と比べて、間違いないことを確かめることも、中学生の段階では必要なことで

表 2: 半減期が 1 日の場合どんどん 2 で割る計算を行っていく

x	y
0	1000
1	$500 = 1000 \times \frac{1}{2}$
2	$250 = 500 \times \frac{1}{2} = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
3	$125 = 250 \times \frac{1}{2} = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
4	$62.5 = 125 \times \frac{1}{2} = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

ある。

半減期が 2 日のときは、2 日で半分なることだから、先のパソコンの結果で x を 2 倍に書き換えた表をもとに関係式を考えると、$x = 2$ のとき先ほどの $\frac{1000}{2^1}$、$x = 4$ のとき $\frac{1000}{2^2}$

表 3: x を 2 倍に書き換えた表

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	1000	500	250	125	62.5	31.25	15.63	7.81	3.91	1.95	0.98

となることから、

$x = 2$ のとき

$$500 = 1000 \times (\frac{1}{2})^{\frac{2}{2}} = 1000 \times \frac{1}{2}$$

$x = 4$ のとき

$$250 = 1000 \times (\frac{1}{2})^{\frac{4}{2}} = 1000 \times (\frac{1}{2})^2 = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$x = 6$ のとき

$$125 = 1000 \times (\frac{1}{2})^{\frac{6}{2}} = 1000 \times (\frac{1}{2})^3 = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

から x を半分にしてから計算すればいいので

$$y = \frac{1000}{2^{\frac{x}{2}}}$$

が出てくる。半減期を t とした

$$y = \frac{1000}{2^{\frac{x}{t}}}$$

も同じように導ける。生徒の実態や時間数によって、どこまで扱うかを判断することになるが、導けた式が正しいかどうかはエクセルなどで確かめる必要は出てくる。また、グラフから表にない値を読み取らせる等の展開も考えられる。

5　授業実践について

5.1　授業計画

半減期について生徒がどこまで理解できるかを授業実践で探ることにした。実践した学級は筆者の勤務校で男子4名、女子4名の小規模学級である。当日は1名の欠席者があり、7名で授業を行った。指導案はたてたが、初めての試みであるのでそれにはとらわれずに生徒の反応を見ながら「身のまわりの事象の中には、既習の関数ではとらえられない関数関係があることを知る」、「半減期を『物質の (原子の) 個数は日数の関数』であるととらえ、その特徴について理解できる」、「半減期を1日としたときの関係式について理解できる」の3つを授業のねらいとして展開していった。

5.2　授業展開

半減期について、漢字の意味から「放射性物質が半分になるまでの時間」ととらえさせ、「半減期が8日ということは、1000個ある物質が8日たてば500個になる」と確認した後に「16日後には、どのくらいになるか」と尋ねたところ7人中3人の生徒が250個と答えることができ、0個と答えたのは2人で残りの生徒はそれ以外の答だった。極少ない生徒数での実践ではあるが、「半減期の2倍の時間がたつと完全になくなる」という誤解は起きやすい半面、「どんどん半分になっていく」という正しい認識を持つこともそれほど難しいことではないと言えそうである。

十分な時間をかければ、半減期が1日や2日の場合の関係式を自力で導くことも可能だとは考えられるが、1時間の授業の中で「どんどん半分になっていく」という本質的な部分を理解し、関係式に表れる定数の意味を理解させるために、後半は教師主導の説明で内容を理解させる方向に持っていった。

5.3　考察

理解の程度は授業の8日後に行われた1学期末テストに授業に関連する出題をし、その結果から考察を行った。出題した問題は次の4問である。

今、半減期が1日である放射性物質が1000個あるとする。これが今後 x 日で y 個になるとするとき、次の問に答えなさい。

(1) 1日経つと放射性物資の数はいくつになりますか。... 正答数 (6名/7名中)
(2) 2日経つと放射性物質の数はいくつになりますか。... 正答数 (6名/7名中)
(3) 10日経つと、おおよそ何個になりますか。... 正答数 (3名/7名中)
(4) x と y の関係を式に表しなさい。... 正答数 (4名/7名中)

(3) については今回の授業では、特に強調はせず少し面倒な計算問題といったものになった。関係式 $y = \frac{1000}{2^x}$ を使った者は4名で、正答者3名は全て $1000 \div 1024$ を使って求めていた。1名は $2^{10} = 20$ として誤答50を出している。2で割り続けた者は2名で1名は

時間切れで無答、1名は計算間違いで 0.6 と答えている。(4) の正答者4名のうち1名が $1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdots$ で答え、3名が $y = \frac{1000}{2^x}$ で答え、見慣れない式ではあるが抵抗はなかったと思われる。

少人数学級を対象にした1回だけの取り組みであったが、半減期を中学3年で扱うことは無理なことではないと言えるような結果が得られた。今後、他校にも呼びかけ実践を重ね、より良い授業のあり方を探っていきたい。

6　参考：放射性物質の半減期の数学的背景

時間 x に対する放射性物質の数 y の変化のようすは、自分自身 y に比例して減っていくと考えられる。これを微分方程式で書くと

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

となり、これを解くと

$$y = Ce^{-kx}$$

という関係式が得られる (k は物質によって決まる)。定数の部分が簡単になるように $C = 1000, e^k = 2$ とすると半減期が1日 (単位は時間でも年でも良い) の物質が最初に 1000 個ある場合を想定したことになり、関係式は次のようになる。

$$y = \frac{1000}{2^x}$$

半減期が1日でない場合は

$$y = \frac{1000}{2^{\frac{x}{t}}}$$

である。

参考文献

[1] 文部科学省、『中学校学習指導要領』、(文部科学省、平成 20 年 3 月告示)

[2] 文部科学省、『中学校学習指導要領解説　数学編』(教育出版、平成 20 年 9 月 25 日)

[3] David Burghes,Morag Borrie 著、垣田高夫, 大町比佐栄 訳、『微分方程式で数学モデルを作ろう』(日本評論社、1990 年)

[4] 『Newton 2011 年 6 月号』「未曾有の大震災　M9 地震, 津波, 原発事故」、(ニュートンプレス)

[5] 『Newton 2011 年 7 月号』「きちんと知りたい　原発と放射能」、(ニュートンプレス)